ASÍNTOTA

Es una recta imaginaria que nosotros calculamos y representamos con una línea discontinua. Esta recta tiene la propiedad de que en el infinito no puede ser traspasada por la gráfica de la función, veremos al final una gráfica para que se sepa visualmente de qué hablan estas líneas.

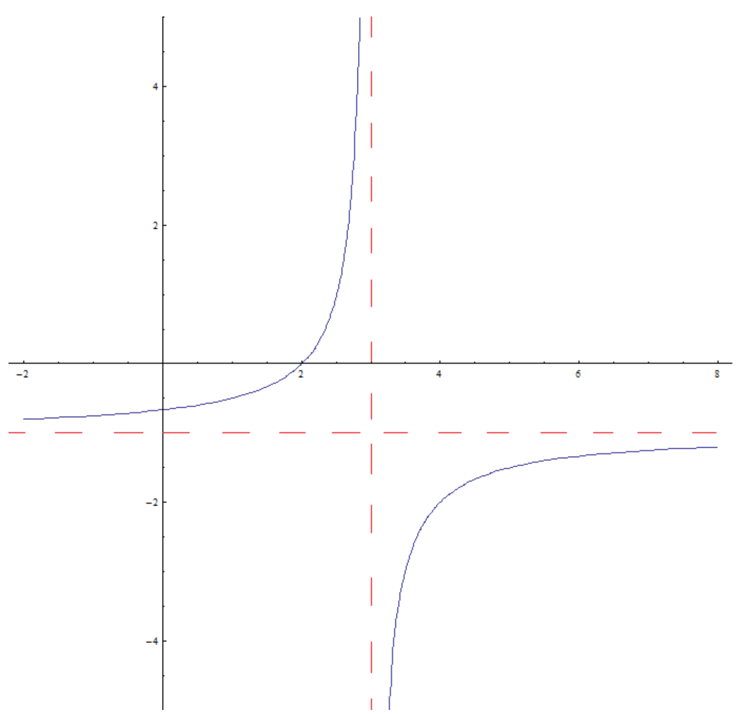
Hay tres tipos de asíntotas, el orden a seguir para calcular las asíntotas es primero las verticales, segundo las horizontales, y por último las oblicuas.

<u>Observación</u>: veremos por la definición de asíntotas horizontales y oblicuas que son incompatibles, es decir, no puede haber horizontales y oblicuas a la vez. Así pues, si hay asíntotas horizontales, no hay oblicuas, y viceversa.

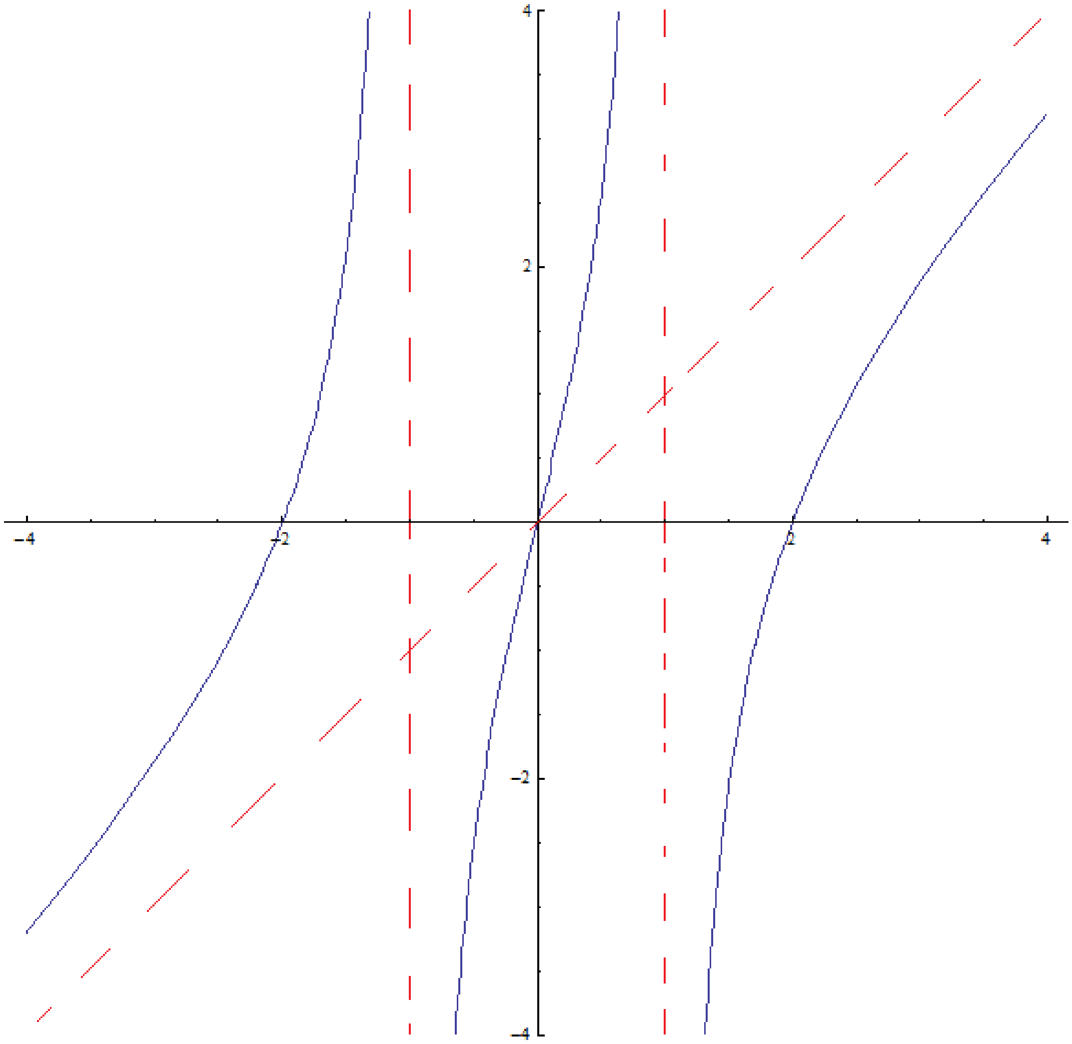
Teoría	Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x-2}{3-x}$	Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}$
Asíntotas Verticales	**Asíntotas Verticales**	**Asíntotas Verticales**
$Si\ \lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty$ $\Rightarrow\ \boxed{x=k}$ es A. V. Generalmente la <u>asíntota vertical</u> será, en funciones racionales, aquel valor que no está en el dominio. Aunque para no cometer ningún error su definición correcta es la de la celda de arriba.	$Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$ $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-2}{3-x}=\infty$ $Entonces\ \boxed{x=3}\ es\ la\ A.V.$ En un eje cartesiano trazamos automáticamente una recta vertical que pase por el 3	$Dom(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty\ ;\ \lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty$ $Entonces\ \boxed{x=-1}\ y\ \boxed{x=1}\ son\ las\ A.V.$ En un eje cartesiano trazamos automáticamente dos rectas verticales que pasen, una por el -1, y otra por el 1.
Posición Relativa A. V.	Posición Relativa A. V.	Posición Relativa A. V.
$\lim_{x\to k^-} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to k^+} f(x)=\pm\infty$ Se trata de saber por dónde queda la gráfica de la función a la izquierda y a la derecha de la recta imaginaria (nuestra A.V.).	$\lim_{x\to 3^-}\dfrac{x-2}{3-x}=+\infty$ $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{3-x}=-\infty$ A la izquierda de la recta $x=3$ hacemos una marca arriba. A la derecha de la recta $x=3$ hacemos una marca abajo.	$\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=+\infty \quad \lim_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=-\infty$ $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=-\infty \quad \lim_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=+\infty$ Hacemos las marcas de manera análoga al ejemplo anterior. A izquierda y a derecha de x=-1, e idem para x=1
Asíntotas Horizontales	**Asíntotas Horizontales**	**Asíntotas Horizontales**
$Si\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=c$ $\Rightarrow\ \boxed{y=c}$ es A. H. Generalmente saldrá sólo un valor para c, pero habrá algunos casos en los que haya que estudiar el límite en $+\infty$ y en $-\infty$ por separado, porque podrán salir valores distintos.	$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{3-x}=-1$ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{3-x}=-1$ Entonces la asíntota horizontal es la recta $y=-1$. Así pues trazamos una recta horizontal que pase por el -1	$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty\quad Entonces\ no\ tiene\ A.H.$
Posición Relativa A. H.	Posición Relativa A. H.	Posición Relativa A. H.
$\lim_{x\to-\infty} f(x)-c=0^{\pm}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-c=0^{\pm}$ $0^+\rightarrow$ la gráfica está por encima de la asíntota. $0^-\rightarrow$ la gráfica está por debajo de la asíntota.	Realizamos la operación $f(x)-c$ $\dfrac{x-2}{3-x}-(-1)=\dfrac{x-2}{3-x}+1=\dfrac{x-2+3-x}{3-x}$ $=\dfrac{1}{3-x}$ A continuación calculamos los límites que tocan: $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3-x}=0^+$ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3-x}=0^-$	

	En el $-\infty$ hacemos una marca encima de la recta $y=-1$ En el $+\infty$ hacemos una marca debajo de la recta $y=-1$	
Asíntotas Oblicuas	**Asíntotas Oblicuas**	**Asíntotas Oblicuas**
$\textit{Existe la A.O.}\ \boxed{y=mx+n}$ $si \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty \\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\ \exists \\ n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-mx\ \exists \end{cases}$	No tiene asíntotas oblicuas porque existen asíntotas horizontales.	$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^3-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x^2-1}=0 \end{array} \right\}$
Puede no existir la A. O., pero si existe es porque los límites, de la celdilla anterior, los hemos podido calcular.		$\Rightarrow y=1x+0\Rightarrow \boxed{y=x}$ *es nuestra A.O.* Ahora dibujamos la recta $y=x$
Posición Relativa A. O.	Posición Relativa A. O.	Posición Relativa A. O.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(mx+n)=0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(mx+n)=0^{\pm}$		Calculamos $f(x)-(mx+n)$: $\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}-x=\dfrac{-3x}{x^2-1}$ Y ahora hallamos el límite en $\pm\infty$
$0^+\rightarrow$ la gráfica está por encima de la asíntota. $0^-\rightarrow$ la gráfica está por debajo de la asíntota.		$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x^2-1}=0^+$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x^2-1}=0^-$ Esto significa que en lo más a la izquierda de la asíntota oblicua la función se queda por encima, y en lo más a la derecha de la asíntota oblicua la función se queda por debajo.

Gráfica del ejemplo 1



Gráfica del ejemplo 2



A continuación veamos ejercicios propios del nivel de 2º de bachillerato. Para estos es necesario el uso de la regla de L'H. También cabe destacar que al ser funcione más complejas se trata de hallar los límites en el $+\infty$ y en el $-\infty$, cuando estudiemos asíntotas horizontales y oblicuas.
Veamos 2 ejemplos que clarifican bastante:

1) Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

<u>Asíntotas Verticales</u>:

$Si\ \lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=k}$ es A. V. Calculemos el dominio, para ello hemos de resolver $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$, luego $x=0$ es nuestra candidata.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}\left[\begin{array}{l}\text{Esto quiere decir que a la izquierda de la recta x=0 la función se va hacia -}\infty, \\ \text{y a la derecha de la recta x=0 la función se va a +}\infty.\end{array}\right]$$

<u>Asíntotas No verticales</u>:

$Si\ \lim_{x\to \pm\infty} f(x)=c \Rightarrow$ $\boxed{y=c}$ es A. H.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=1\to[\text{Escala de infinitos}] \end{array}\right\}\left[\begin{array}{l}\text{Esto quiere decir que a la izquierda } x=0 \text{ la función} \\ \text{tiene la asíntota } y=-1\text{, a la derecha } x=0 \text{ la función} \\ \text{tiene la asíntota } y=1.\end{array}\right]$$

Veamos su posición relativa

<u>PR en los negativos</u>,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}-(-1)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x+1+\left(e^x-1\right)}{e^x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{2\cdot 0}{0-1}=0^-$$

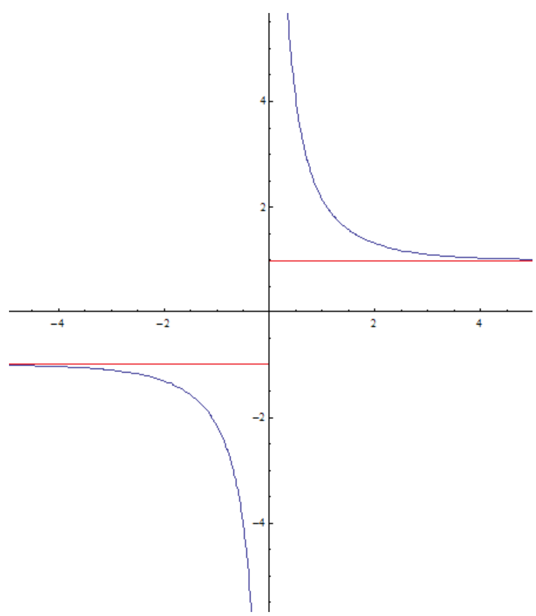
Luego la gráfica queda por debajo de la asíntota en el $-\infty$.

<u>PR en los positivos</u>,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}-(1)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+1-\left(e^x-1\right)}{e^x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x-1}=0^+$$

Luego la gráfica queda por encima de la asíntota en el $+\infty$.

Al tener asíntotas horizontales no posee asíntotas oblicuas. Veamos su gráfica:



2) Estudia las asíntotas de $f(x)=5x+3\sqrt{x^2-1}$

<u>Asíntotas Verticales</u>:

$Si\ \lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=k}$ es A. V. Calculemos el dominio, para ello hemos de resolver $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow$ $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, luego aquí NO HAY AV

<u>Asíntotas No verticales</u>:

Asíntotas horizontales $Si\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=c \Rightarrow$ $\boxed{y=c}$ es A. H.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}=[-\infty+\infty\, I]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-5x+3\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(-5x-3\sqrt{x^2-1}\right)}{-5x-3\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9+16x^2}{-5x-3\sqrt{x^2-1}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}$$

[Esto quiere decir que no hay asíntotas horizontales]

Asíntotas oblicuas:

$$Existe\ la\ A.O. \boxed{y=m\,x+n}\ si \begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty\\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\ \exists\\ n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-m\,x\ \exists\end{cases}$$

La primera condición ya se verifica vamos ahora con las otras dos:

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+3\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x+3\sqrt{x^2-1}}{-x}=\dfrac{-2}{-1}=2\\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+3\sqrt{x^2-1}}{x}=\dfrac{8}{1}=8\end{array}\right\}$$

[De nuevo aquí, nos salen por la izquierda y por la derecha límites diferentes. Luego tenemos dos asíntotas oblicuas distintas. Una con pendiente 2 definida en los negativos. Y otra con pendiente 8 definida en los positivos.]

Veamos ahora la tercera condición a ver si se verifica para hallar las ordenadas en el origen de ambas AO. Y como son dos, una en los negativos y otra en los positivos, tendremos que hallar la n en más y menos infinito.

$$\left.\begin{array}{l}n=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}-2x=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+3\sqrt{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x+3\sqrt{x^2-1}\\ n=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}-8x=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x+3\sqrt{x^2-1}\end{array}\right\}$$

[Luego n valdrá lo mismo en las dos asíntotas. Así que vamos a calcular un sólo límite]

$$n=\lim_{x\to+\infty}-3x+3\sqrt{x^2-1}=[-\infty+\infty\, I]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-3x+3\sqrt{x^2-1}\right)\left(-3x-3\sqrt{x^2-1}\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-9\left(x^2-1\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=0$$

Luego las asíntotas oblicuas son $\begin{cases}y=2x & \forall x\in(-\infty,0)\equiv \text{los negativos}\\ y=8x & \forall x\in(0,+\infty)\equiv \text{los positivos}\end{cases}$

Veamos ahora las posiciones relativas de la gráfica de f respecto de la asíntota. Lamentablemente en este caso, como en el anterior, hemos de estudiar las posiciones relativas para las dos asíntotas.

<u>PR en los negativos</u>,

$$\lim_{x\to-\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}-2x=\lim_{x\to-\infty} 3x+3\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}-3x+3\sqrt{x^2-1}=[-\infty+\infty\, I]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-3x+3\sqrt{x^2-1}\right)\left(-3x-3\sqrt{x^2-1}\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-9\left(x^2-1\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{-3x-3\sqrt{x^2-1}}=0^-$$

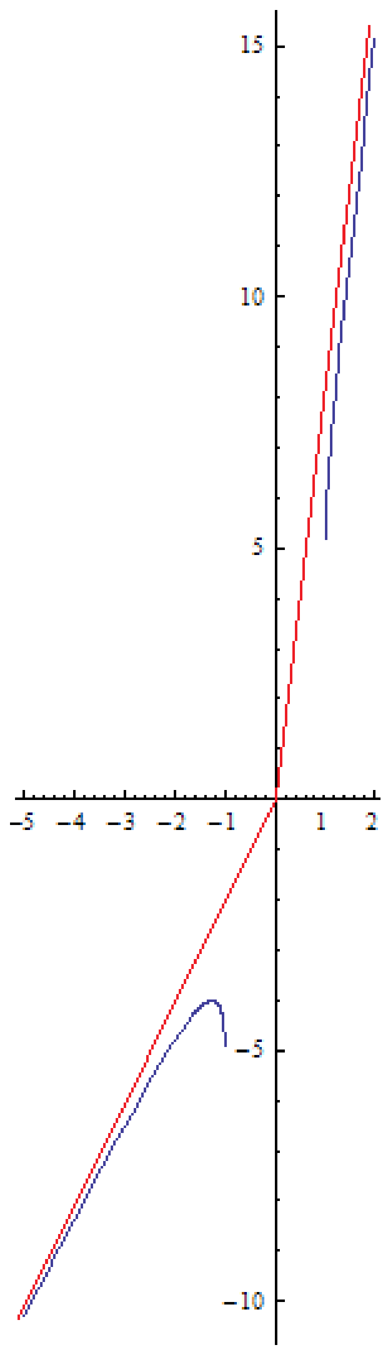
Luego la gráfica queda por debajo de la asíntota en el $-\infty$.

<u>PR en los positivos</u>,

$$\lim_{x\to+\infty} 5x+3\sqrt{x^2-1}-8x = \lim_{x\to+\infty} -3x+3\sqrt{x^2-1} = \left[-\infty+\infty\, I\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-3x+3\sqrt{x^2-1}\right)\left(-3x-3\sqrt{x^2-1}\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2-9\left(x^2-1\right)}{-3x-3\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{-3x-3\sqrt{x^2-1}} = 0^-$$

Luego la gráfica queda por debajo de la asíntota en el $+\infty$.
Para finalizar este ejemplo veamos su gráfica.
<u>Observación</u>: Para hallar las gráficas de las funciones, muy raras veces basta con el estudio de las asíntotas para esbozar la gráfica de la función. Hacen falta cosas como la monotonía y los puntos de corte.



3) Estudia las asíntotas de $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}$

Asíntotas Verticales y Horizontales: No hay.

¿Por qué?

$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} / x^2+3x+2\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$ luego no tiene asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty\end{array}\right\}\text{Luego no tiene asíntotas horizontales}$$

Asíntotas Oblicuas

La primera condición ya se ha verificado

La segunda condición nos calcula el m en caso de existir, veámoslo:

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{-x}=\dfrac{1}{-1}=-1\\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}$$

De nuevo aquí, nos salen por la izquierda y por la derecha límites diferentes. Luego tenemos dos asíntotas oblicuas distintas. Una con pendiente -1 definida en los negativos. Y otra con pendiente 1 definida en los positivos.

La tercera condición nos calcula la ordenada en el origen de cada una de las asíntotas.

$$n=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-(-x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\frac{-3}{2}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=\frac{3}{2}$$

Luego en las asíntotas quedan $\begin{cases}y=-x-\dfrac{3}{2} & \forall x\in(-\infty,0)\equiv\text{los negativos}\\ y=x+\dfrac{3}{2} & \forall x\in(0,+\infty)\equiv\text{los positivos}\end{cases}$

Ahora vamos a estudiar la posición relativa de la gráfica de la función respecto de las asíntotas, en los negativos y en los positivos.

<u>PR en los negativos</u>,

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-\left(-x-\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}=0^-$$

Luego la gráfica queda por debajo de la asíntota en el $-\infty$.

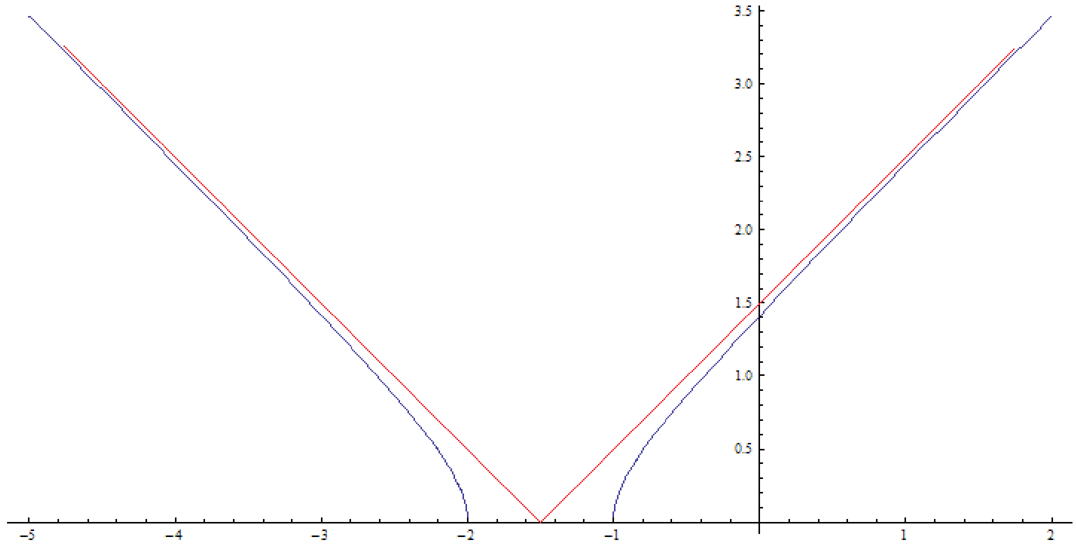
<u>PR en los positivos</u>,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-\left(x+\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x+2}+\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+3x+2}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}=0^-$$

Luego la gráfica queda por debajo de la asíntota en el $+\infty$.

Veamos la gráfica como queda para comprobar que todo ha salido bien.



4) Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$