

ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función $y = f(x)$ es **derivable** en el punto $x = a$, si es continua en ese punto y además cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

EJEMPLO DE FUNCIÓN A TROZOS DERIVABLE

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ -2\ln x + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2\ln x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 2) = 1$$

$$f(1) = -2\ln 1 + 1 = 1$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en $x = 1$.

Derivabilidad:

Se deriva la función f trozo a trozo

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-2}{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y se calculan sus límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x} = -2$$

Como ambas coinciden y la función es continua, f es derivable en $x = 1$.

EJEMPLO DE FUNCIÓN NO DERIVABLE POR SER DISCONTINUA

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 = -1$$

Al ser los límites laterales distintos la función f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$, por tanto, no es derivable en $x = 1$.

EJEMPLO DE FUNCIÓN NO DERIVABLE PORQUE LAS DERIVADAS LATERALES NO COINCIDEN

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 = -1$$

$$f(1) = (1-1)^2 - 1 = -1$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en $x = 1$.

Derivabilidad:

Se deriva la función f trozo a trozo

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x-1) = 0$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

EJEMPLO DE CÓMO CALCULAR DOS VARIABLES PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA DERIVABLE

Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \leq 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + n) = n \\ f(0) &= 5 \end{aligned} \right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x = 0 = f'(0^+) \end{aligned} \right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \rightarrow m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en \mathbb{R} para $m = 0$ y $n = 5$.

Ejercicios (Con videos que muestran la solución)

1.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcula a y b para que f(x) sea

derivable en $x = 1$.

<http://www.youtube.com/watch?v=FC5yO8WVS8U>

2.- ¿Hay algún número a para que la función f(x) sea derivable en $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=BNDrjITrQ6A>

3.- Calcula las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen) y comprueba si la función es derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=zqa4Vtm8v9E>

4.- Calcula las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen) y comprueba si la función es derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

http://www.youtube.com/watch?v=PTCrwDSeK_A&feature=relmfu

5.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 7x + 11 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=l-7JBODoAZw>

6.- Halla los valores de a y de b, para que la función f(x) sea continua y derivable en todos su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=-d1aab08akU>

7.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f(x)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=ovam-lhZsaY>

8.- Se sabe que la función $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por Es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

http://www.youtube.com/watch?v=c-tgD_8I2Nw

9.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula a, b y c para que la función sea derivable en $x=1$ sabiendo que $f(0)=f(4)$

<http://www.youtube.com/watch?v=Bxqy7KT2LV0&feature=relmfu>

10.- Por qué no existe la derivada de $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ en $x = 4$?
<http://www.youtube.com/watch?v=xi6bUSK0frQ>