OPERACIONES CON MATRICES

a. Suma de matrices.

Para sumar o restar dos matrices tienen que tener **igual dimensión** y se suman o restan sus elementos término a término: $A+B=C \quad \to \quad a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1/2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1/5 & 7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+4 & -1+2 \\ 4+1/5 & 1/2+7 \\ -6+2 & 3-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 21/5 & 15/2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1) Conmutativa: $\boxed{A+B=B+A}$

2) Asociativa: $\boxed{(A+B)+C=A+(B+C)}$

3) Elemento Neutro (Matriz nula): $\boxed{A+O=A}$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

4) Elemento Opuesto: Si se cambia de signo cada elemento de una matriz A, obtenemos la matriz opuesta de A, ***-A***, de tal forma que $\boxed{A+(-A)=O}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad -A=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

> ***Ejercicio 5:*** *Dadas las matrices:*
> $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *calcula* $-B+(C-A)$

b. Producto de una matriz por un número.

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica dicho número por cada elemento de la matriz.

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ entonces } (-2)\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & -12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de este producto son:

1) $\boxed{\lambda\cdot A+\mu\cdot B=(\lambda+\mu)\cdot A}$, siendo λ y μ números reales y A una matriz

Por ejemplo: 7·A+5·A=12·A

2) $\boxed{\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B}$ siendo λ un número y A y B matrices de la misma dimensión.

Por ejemplo: 3·(A+B)=3·A+3·B

3) $\boxed{\lambda\cdot(\mu\cdot A)=\lambda\cdot\mu\cdot A}$, siendo λ y μ números reales y A una matriz

Por ejemplo: 7·(5·A)=35·A

Ejercicio 6: *Sean las matrices:*

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. *Calcula: a)* $-2A+5B$ *b)* $\frac{3}{2}\left(-B^t-\frac{1}{3}A^t\right)$

c. Producto de matriz fila por matriz columna y viceversa

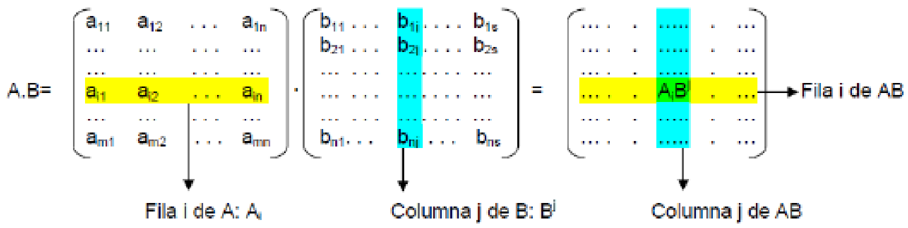
Se multiplican elemento a elemento y luego se suman.

Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=3\cdot(-5)+1\cdot 7+(-2)\cdot 4=-16$ y

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} (-5)\cdot 3 & (-5)\cdot 1 & (-5)\cdot 2 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 1 & 7\cdot 2 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & -5 & -10 \\ 21 & 7 & 14 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

d. Producto de matrices.

Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la 1ª ha de ser igual al número de filas de la segunda. La matriz producto tiene tantas filas como el primer factor y tantas columnas como el segundo: $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times s}{B} \rightarrow A\cdot B_{m\times s}$



Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{3x\boxed{3}}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & - \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{\boxed{3}x2}=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+1\cdot 3+4\cdot 1 & 2\cdot 9+1\cdot(-6)+4\cdot 5 \\ 3\cdot 4+5\cdot 3+(-2)\cdot 1 & 3\cdot 9+5\cdot(-6)+(-2)\cdot 5 \\ (-1)\cdot 4+7\cdot 3+8\cdot 1 & (-1)\cdot 9+7\cdot(-6)+8\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 32 \\ 25 & -13 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Propiedades:

1) El producto de matrices no es, en general, conmutativo. $\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=B\cdot A$$

2) Es asociativo : $\boxed{(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)}$

3) Es distributivo respecto a la suma: $\boxed{\begin{array}{l} (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C \\ C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B \end{array}}$

4) Elemento neutro: Las matrices I_n son neutras para el producto , es decir, $\boxed{I_n\cdot A_{nxm}=A_{nxm}\cdot I_n=A_{nxm}}$.

Ejercicio 7*: Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1, 0), y que verifica* $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, *siendo* $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Ejercicio 8*: ¿Cómo tienen que ser dos matrices A y B para que su producto AB sea un número real?*

Ejercicio 9*: Dada* $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$ *calcula a y b para que* $A^2=A$

Ejercicio 10*: Dadas las matrices:* $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

calcula $\left(2A-B^t\right)^t\cdot C$

Ejercicio 11*: Calcula m y n para que se cumpla la igualdad* $mA^2+nA^t=2I$, *teniendo en cuenta que* I *es la matriz identidad y* $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Ejercicio 12*: Se dice que una matriz cuadrada es* ***ortogonal*** *si cumple que* $\boxed{A^t\cdot A=I,}$ *donde* I *es la matriz identidad y* A^t *es la traspuesta de la matriz* A. *Determina los valores de a y b* para los que la matriz $A=\begin{pmatrix}a & -a & b\\ a & a & 0\\ 0 & b & -1\end{pmatrix}$ sea ortogonal