

2.4 CÁLCULO DE DISTANCIAS

Distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es el módulo del vector \vec{PQ} :

$$\text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a una recta $r: Ax + By + C = 0$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

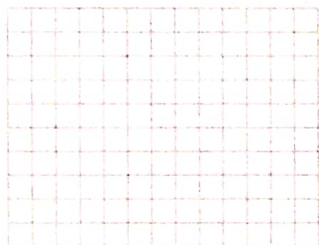
1 Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) $A(-4, 2), B(5, 6)$

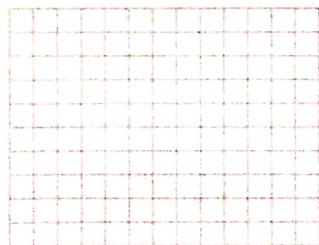
b) $P(3, -5), Q(-2, 4)$

c) $R(-3, 0), S(0, -4)$

2 Dibuja el triángulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(5, 0)$, y halla la longitud de sus lados.



3 Comprueba, aplicando el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(2, 5)$, $B(6, 0)$ y $C(-3, 1)$ es rectángulo en A y halla su área.



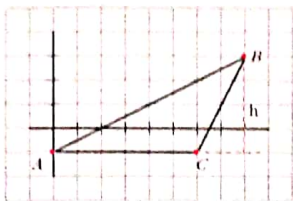
4 El triángulo del ejercicio anterior, además de rectángulo, es isósceles. Calcula la longitud de la altura relativa al lado desigual y halla su área tomando como base la hipotenusa.

5 Calcula el valor de k para que la distancia entre los puntos $P(3, 0)$ y $Q(-2, k)$ sea igual a $\sqrt{61}$.

6 Halla los puntos del eje de abscisas cuya distancia al punto $R(-4, 5)$ sea igual a $\sqrt{50}$.

EJERCICIO RESUELTO

En el triángulo de vértices $A(0, -1)$, $B(8, 3)$ y $C(6, -1)$ calcula la longitud de la altura que parte de B .



RESOLUCIÓN

Hallamos la ecuación del lado \overline{AC} :

$$m = \frac{-1 + 1}{6 - 0} = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow y + 1 = 0$$

Calculamos la distancia de B a la recta \overline{AC} :

$$\text{dist}(B, \overline{AC}) = h = \frac{|0 \cdot 8 + 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4$$

7 Calcula la distancia del punto $P(-3, 4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y - 10 = 0$

b) $x - y + 5 = 0$

c) $2x - 3 = 0$

8 Calcula la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos:

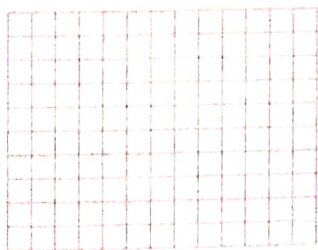
a) $P(3, 2)$, $r: y = x - 3$

b) $P(-1, 0)$, $r: y = 2x - 4$

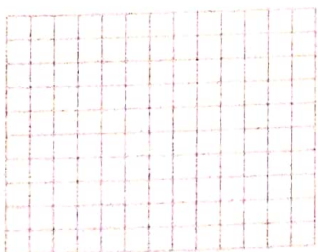
c) $P(2, 2)$, $r: x - y - 2 = 0$

d) $P(1, -2)$, $r: 2x + 3y + 5 = 0$

9 Dados los puntos $P(4, -2)$, $Q(-3, 3)$ y $R(-2, -3)$, calcula la distancia de R a la recta que pasa por P y Q .



10 En el triángulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(5, 0)$, halla la longitud de las tres alturas.



11 Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas tomamos un punto cualquiera de una de ellas y calculamos la distancia de ese punto a la otra.

Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas paralelas:

a) $2x + 3y - 5 = 0$
 $2x + 3y + 4 = 0$

b) $y = 3x - 1$
 $y = 3x + 2$

c) $x - 2y + 3 = 0$
 $2x - 4y - 5 = 0$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la ecuación de las rectas paralelas a $r: 2x - y + 3 = 0$ que distan de r $\sqrt{5}$ unidades.

RESOLUCIÓN

Las rectas s paralelas a r tienen por ecuación $2x - y + k = 0$.

La distancia de un punto P de r a esa recta debe ser igual a $\sqrt{5}$.

Para $x = 0$, $2 \cdot 0 - y + 3 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow P(0, 3)$

$$d(P, s) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \rightarrow |-3 + k| = 5 \begin{cases} -3 + k = 5 \rightarrow k = 8 \\ -3 + k = -5 \rightarrow k = -2 \end{cases}$$

Las rectas paralelas a r que cumplen la condición $d(r, s) = \sqrt{5}$ son:

$$s_1: 2x - y + 8 = 0 \quad \text{y} \quad s_2: 2x - y - 2 = 0$$

12 Halla la ecuación de las rectas paralelas a $r: 3x - 4y + 6 = 0$ que disten de r 2 unidades.

13 Determina el valor de k para que la distancia del punto $P(-2, 3)$ a la recta $4x + 3y + k = 0$ sea igual a 2.

14 Calcula n para que la distancia entre las rectas $r: y = -\frac{1}{2}x + 3$ y $s: y = -\frac{1}{2}x + n$ sea igual a $\sqrt{2}$.

15 Calcula k para que la distancia del punto $P(1, 7)$ a la recta $2y + k = 0$ sea igual a 3.

16 Halla el valor de a para que la distancia del punto $Q(1, -4)$ a la recta $r: ax - 2y - 5 = 0$ sea igual a 1.

$$7) a) k = -6/5$$

$$b) k = 15/2$$

$$8) s: -x + 3y - 6 = 0$$

$$r: 2x - 4y - 1 = 0$$

$$9) \overline{BC}: x + 2y - 13 = 0; \quad \overline{CD}: 2x - 3y - 5 = 0;$$

$$A(0, 2), B\left(\frac{27}{7}, \frac{32}{7}\right), D\left(\frac{22}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Página 22

$$1) a) 60^\circ 15' 18''$$

$$b) 81^\circ 52' 12''$$

$$c) 4^\circ 23' 55''$$

$$2) \hat{A} = 55^\circ 18' 17''$$

$$\hat{B} = 74^\circ 55' 53''$$

$$\hat{C} = 49^\circ 45' 49''$$

Página 23

$$3) \alpha_1 = 135^\circ; \alpha_2 = 36^\circ 52' 12''; \alpha_3 = 111^\circ 48' 5''$$

$$4) k = 15/2$$

$$5) \hat{A} = \hat{C} = 63^\circ 26' 6''; \hat{B} = \hat{D} = 116^\circ 33' 54''$$

$$6) y = 3 + 1(x + 2); \quad y = 3 - 7(x + 2)$$

Página 24

$$1) a) \sqrt{97} \quad b) \sqrt{106} \quad c) 5$$

$$2) \overline{AB} = 5; \quad \overline{AC} = 2\sqrt{10}; \quad \overline{BC} = \sqrt{29}$$

$$3) (\sqrt{41})^2 + (\sqrt{41})^2 = (\sqrt{82})^2; \quad \text{Área} = 20,5 \text{ u}^2$$

$$4) h = \frac{\sqrt{82}}{2}; \quad \text{Área} = 20,5 \text{ u}^2$$

$$5) k = \pm 6$$

$$6) (1, 0) \text{ y } (-9, 0)$$

Página 25

$$7) a) \frac{4\sqrt{13}}{13} \quad b) \sqrt{2} \quad c) \frac{9}{2}$$

$$8) a) \sqrt{2} \quad b) \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad c) \sqrt{2} \quad d) \frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$9) d(R, \overline{PQ}) = \frac{37\sqrt{74}}{74}$$

$$10) h_A = \frac{26}{\sqrt{29}}; \quad h_B = \frac{13}{\sqrt{10}}; \quad h_C = \frac{26}{5}$$

$$11) a) \frac{9\sqrt{13}}{13} \quad b) \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad c) \frac{11\sqrt{20}}{20}$$

Página 26

$$12) 3x - 4y + 16 = 0; \quad 3x - 4y - 4 = 0$$

$$13) k = 9; \quad k = -11$$

$$14) n = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{11}{2}$$

$$15) k = -8; \quad k = -20$$

$$16) a = -5/6$$

Página 27

$$1) a) x - 6y - 6 = 0$$

$$b) \hat{A} = 42^\circ 16' 25''$$

$$c) \left(\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

$$d) \text{Área} = 20 \text{ u}^2$$

$$2) A(0, 2), B\left(\frac{14}{5}, 2\right), C\left(\frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right). \quad \text{Área} = \frac{98}{15} \text{ u}^2$$