2.3 ÁNGULO DE DOS RECTAS

Llamamos **ángulo de dos rectas** al menor de los ángulos que forman al cortarse.

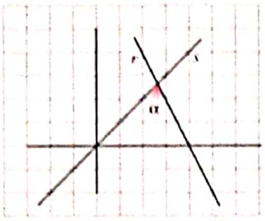
Se puede hallar con los vectores dirección o con las pendientes.

- Con los vectores de dirección $\vec{d}$ y $\vec{d'}$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{d}\cdot\vec{d'}|}{|\vec{d}|\,|\vec{d'}|}$

- Con las pendientes m_1 y m_2: $tg\,\alpha = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$

EJERCICIO RESUELTO

Halla el ángulo que forman las rectas $r: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ ***y*** $s:\ x - y = 0$ ***(hazlo con los vectores dirección y con las pendientes).***



RESOLUCIÓN

- Con los vectores dirección: el de r es $\vec{d}(1, -2)$.

  Escribimos las ecuaciones paramétricas de s:

  $s: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \rightarrow$ vector dirección $\vec{d'}(1, 1)$

  $\cos\alpha = \dfrac{|1-2|}{\sqrt{5}\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \alpha = 71°\ 33'\ 54''$

- Con las pendientes:

  Pasamos r a forma explícita: $y = -2x + 4 \rightarrow m_1 = -2$

  Pendiente de s: $m_2 = 1$

  $tg\,\alpha = \left|\dfrac{1+2}{1-2}\right| = 3 \rightarrow \alpha = 71°\ 33'\ 54''$

1 Halla el ángulo que forman las rectas los siguientes pares de rectas:

a) $y = \dfrac{1}{2}x$

$y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$

b) $2x + y - 1 = 0$

$x - 3y - 7 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$

2 Dibuja el triángulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(5, 0)$, y halla sus ángulos.

3 Halla el ángulo α que forman las rectas r_1, r_2 y r_3 con la parte positiva del eje de abscisas:

r_1: $x + y - 5 = 0$ $\qquad$ r_2: $3x - 4y + 12 = 0$ $\qquad$ r_3: $5x + 2y - 10 = 0$

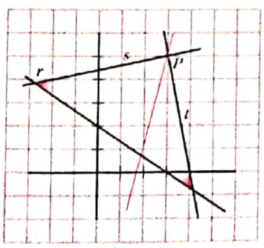
Recuerda que $m = tg\ \alpha$.

4 Halla el valor de k para que las rectas r: $2x + 3y - 6 = 0$ y s: $kx - 5y + 4 = 0$ formen un ángulo de 90°.

5 Halla los ángulos del paralelogramo de vértices $A(3, 1)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 4)$.

EJERCICIO RESUELTO

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 5)$ y forma un ángulo de 45° con la recta r: $2x + 3y - 6 = 0$



Resolución

Pendiente de r: $m_1 = -\dfrac{2}{3}$

$$tg\ 45° = \left|\frac{m_2 + 2/3}{1 - 2/3(m_2)}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{3m_2 + 2}{3 - 2m_2}\right| \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{3m_2 + 2}{3 - 2m_2} \\ -1 = \dfrac{3m_2 + 2}{3 - 2m_2} \end{cases}$$

Con el valor absoluto obtenemos dos soluciones:

$m_2 = 1/5$ o bien $m_2 = -5$

Así pues, hay dos rectas que pasan por $P(3, 5)$ y forman un ángulo de 45° con r. Las obtenemos con la fórmula *punto-pendiente:*

$$s:\ y = 5 + \frac{1}{5}(x - 3) \rightarrow x - 5y + 22 = 0$$

$$t:\ y = 5 - 5(x - 3) \rightarrow 5x + y - 20 = 0$$

6 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $Q(-2, 3)$ y forma con r: $3x - y + 2 = 0$ un ángulo α tal que $tg\ \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Página 22

1 a) 60° 15' 18'' b) 81° 52' 12''

c) 4° 23' 55''

2 $\hat{A} = 55° \ 18' \ 17''$ $\hat{B} = 74° \ 55' \ 53''$

$\hat{C} = 49° \ 45' \ 49''$

Página 23

3 $\alpha_1 = 135°$; $\alpha_2 = 36° \ 52' \ 12''$; $\alpha_3 = 111° \ 48' \ 5''$

4 $k = 15/2$

5 $\hat{A} = \hat{C} = 63° \ 26' \ 6''$; $\hat{B} = \hat{D} = 116° \ 33' \ 54''$

6 $y = 3 + 1(x + 2)$; $y = 3 - 7(x + 2)$