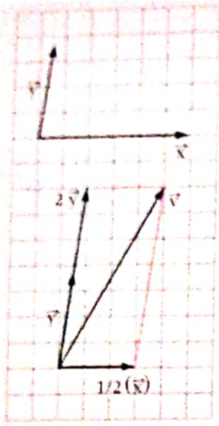
1.2 BASES Y COORDENADAS

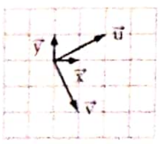


Dos vectores de distinta dirección $(\vec{x}, \vec{y})$ son una **base** de los vectores del plano. Cualquier vector puede ponerse como combinación lineal de ellos.

Observa que $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$. Los números $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ son las **coordenadas de $\vec{v}$** respecto a la base B. Se indica así: $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Si los vectores de la base son perpendiculares entre sí y de módulo 1, la base es **ortonormal.**

EJERCICIO RESUELTO



a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

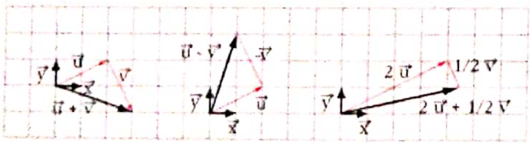
b) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $2u + \frac{1}{2}\vec{v}$, y halla sus coordenadas.

RESOLUCIÓN

a) $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y}$ $\rightarrow$ Coordenadas de $\vec{u}(2, 1)$

$\vec{v} = \vec{x} - 2\vec{y}$ $\rightarrow$ Coordenadas de $\vec{v}(1, -2)$

b)



Comprobamos gráficamente que las coordenadas de los vectores representados son:

$\vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (1, -2) = (3, -1)$; $\vec{u} - \vec{v} = (2, 1) - (1, -2) = (2, 1) + (-1, 2) = (1, 3)$

$2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = 2(2, 1) + \frac{1}{2}(1, -2) = (4, 2) + \left(\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

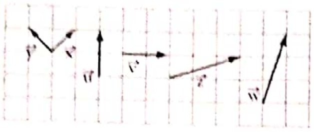
1 Si $\vec{u}(-1, 3)$ y $\vec{v}(2, -2)$ son las coordenadas de los vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u}$ b) $-\frac{1}{2}\vec{v}$ c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ d) $-\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

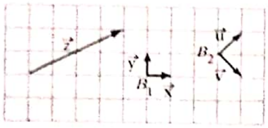
2

Justifica por qué los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ forman una base ortonormal. Dibuja los siguientes vectores y di cuáles son sus coordenadas respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$:

a) $-\vec{x} + \vec{y}$ b) $\vec{x} - 2\vec{y}$ c) $2\vec{x} + 3\vec{y}$ d) $2\vec{x} + \vec{y}$

3. 

¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$:

4. 

Halla las coordenadas del vector $\vec{z}$ respecto de las bases $B_1(\vec{x}, \vec{y})$ y $B_2(\vec{u}, \vec{v})$.

5. Halla las coordenadas del vector $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$ siendo $\vec{a}(3, -6)$ y $\vec{b}\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$.

EJERCICIO RESUELTO

Calcula m y n para que se verifique $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v}$, siendo $\vec{u}(4, -8)$, $\vec{v}(0, 2)$ y $\vec{w}(2, -1)$.

RESOLUCIÓN

Expresamos la igualdad sustituyendo los vectores por sus coordenadas:

$(2, -1) = m\,(4, -8) + n\,(0, 2) = (4m, -8m) + (0, 2n)$

$$(2, -1) = (4m, -8m + 2n) \quad \begin{cases} 2 = 4m \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \\ -1 = -8m + 2n \quad \rightarrow \quad n = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$. Así expresamos $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

6. Dados los vectores $\vec{a}\left(4, \frac{-1}{3}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{5}{2}, -4\right)$ y $\vec{c}(7, 7)$, calcula m y n de modo que $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

7. Halla las coordenadas del vector $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, siendo $\vec{a}(-4, 6)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $\vec{c}(3, -3)$.

8. Dados los vectores $\vec{u}(15, -2)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(6, 7)$, expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8 $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

$\vec{b} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$

$\vec{c} = \vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} - 2\vec{w}$

9 a) $\vec{v}_1 = \frac{3}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

b) $\vec{v}_2 = 2\vec{x} - \vec{y}$

c) $\vec{v}_3 = -\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$

10 $\vec{a} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; $\vec{b} = -2\vec{x} + \vec{y}$;

$\vec{c} = 0 \cdot \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$; $\vec{d} = 3\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y}$

Página 6

1 a) $(-2, 6)$

b) $(-1, 1)$

c) $(4, 0)$

d) $(0, -2)$

2 Son dos vectores de distinta dirección, tienen el mismo módulo, $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1$, y son perpendiculares.

a) $(-1, 1)$

b) $(1, -2)$

c) $(2, 3)$

d) $(-2, 1)$

Página 7

3 $\vec{u}(1, 1)$, $\vec{v}(1, -1)$, $\vec{w}(2, 1)$, $\vec{z}(2, -1)$

4 B_1: $\vec{z}(4, 2)$ B_2: $\vec{z}(3, 1)$

5 $\vec{v}(1, 1)$

6 $m = 3$, $n = -2$

7 $\vec{x}(5, 1)$

8 $\vec{w} = 3\vec{u} + 13\vec{v}$

Página 8

1 a) 0 b) 25 c) –25

2 a) –13 b) 6 c) 0

3 a) $x = -10$ b) $x = 0$ c) $x = -15$

4 a) 28 b) –13 c) 22

Página 9

5 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 0$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{74}$

6 a) 21° 48' 5''

b) 47° 43' 35''

c) 180°

7 a) $x = \pm 5\sqrt{3}$

8 $x = \frac{1}{2}$

Página 10

9 a) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

b) $(3, -4)$ y $(-3, 4)$

c) $\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

10 a) $m = \frac{6}{5}$

b) $m = \pm 2\sqrt{3}$