ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

Una función y = f(x) es **derivable** en el punto x = a, si es continua en ese punto y además cumple que:

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

EJEMPLO DE FUNCIÓN A TROZOS DERIVABLE

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x<1 \\ -2lnx+1 & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa x = 1.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2lnx+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2+2) = 1$$

$$f(1) = -2ln1+1 = 1$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en x = 1.

Derivabilidad:

Se deriva la función f trozo a trozo

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{x} & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

y se calculan sus límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2x = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x} = -2$$

Como ambas coinciden y la función es continua, f es derivable en x = 1.

EJEMPLO DE FUNCIÓN NO DERIVABLE POR SER DISCONTINUA

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa x = 1.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -x^2 = -1$$

Al ser los límites laterales distintos la función f tiene una discontinuidad de salto en x= y, por tanto, no es derivable en x = 1.

EJEMPLO DE FUNCIÓN NO DERIVABLE PORQUE LAS DERIVADAS LATERALES NO COINCIDEN

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

en el punto de abscisa x = 1.

SOLUCIÓN.

Continuidad:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1)^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -x^2 = -1$$

$$f(1) = (1-1)^2 - 1 = -1$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en x = 1.

Derivabilidad:

Se deriva la función f trozo a trozo

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

y calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2x = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2(x-1) = 0$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en x = 1.

EJEMPLO DE CÓMO CALCULAR DOS VARIABLES PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA CONTINUA

Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \ \rightarrow \ m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Ejercicios (Con videos que muestran la solución)

1.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{si } x\le 1 \\ x^3-b & \text{si } x>1 \end{cases}$. Calcula a y b para que f(x) sea derivable en x = 1.
http://www.youtube.com/watch?v=FC5yO8WVS8U

2.- ¿Hay algún número a para que la función f(x) sea derivable en x = 2? $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ ax & \text{si } x>2 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=BNDrjlTrQ6A

3.- Calcula las derivadas laterales en x = 1 (si existen) y comprueba si la función es derivable en x = 1 $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x\le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=zqa4Vtm8v9E

4.- Calcula las derivadas laterales en x = 1 (si existen) y comprueba si la función es derivable en x = 1 $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=PTCrwDSeK_A&feature=relmfu

5.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en x = 2. $f(x)=\begin{cases} 7-3x & \text{si } x>2 \\ x^2-7x+11 & \text{si } x\le 2 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=I-7JBODoAZw

6.- Halla los valores de a y de b, para que la función f(x) sea continua y derivable en todos su dominio. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=-d1aab08akU

7.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f(x) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$
http://www.youtube.com/watch?v=ovam-lhZsaY

8.- Se sabe que la función f:[0,5] → R dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$ Es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?
http://www.youtube.com/watch?v=c-tgD_8I2Nw

9.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$
Calcula a, b y c para que la función sea derivable en x=1 sabiendo que f(0)=f(4)
http://www.youtube.com/watch?v=Bxqy7KT2LV0&feature=relmfu

10.- Por qué no existe la derivada de $f(x) = \left| x^2 - 7x + 12 \right|$ en $x = 4$?
http://www.youtube.com/watch?v=xi6bUSK0frQ