3.6 APLICACIONES DE LA DERIVADA. PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN

EJERCICIO RESUELTO

Halla a, b y c en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ de modo que f tenga un máximo de $x = 1$ y un mínimo en $\left(2, \frac{-10}{3}\right)$.

RESOLUCIÓN

Necesitamos tres condiciones para determinar a, b y c:

- Si f tiene un máximo en $x = 1$, se verifica que $f'(1) = 0$:

  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow$ $\mathbf{3a + 2b + c = 0}$

- Por tener un mínimo en $(2, -10/3)$, sabemos que $f'(2) = 0$ y que la curva pasa por ese punto, es decir, $f(2) = -10/3$:

  $f'(2) = 0 \longrightarrow$ $\mathbf{12a + 4b + c = 0}$

  $f(2) = -10/3 \longrightarrow 8a + 4b + 2c - 4 = -10/3 \Leftrightarrow$ $\mathbf{4a + 2b + c = 1/3}$

Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1/3 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} (2^a - 1^a): 9a + 2b = 0 \\ (3^a - 1^a): \; a = 1/3 \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \end{array}$

La función que cumple las condiciones dadas es:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$$

---

1 Halla a, b, y c en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ de forma que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = 1$ y $x = 2$, y pase por el punto $(6, 26)$.

2 Calcula los coeficientes de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $2x - y - 2 = 0$ en el punto $(3, 4)$, y que pasa por el origen de coordenadas.

☛ *f pasa por $(3, 4)$ y $(0, 0)$, y $f'(3) = 2$ (pendiente de la recta tangente).*

3 Halla un polinomio de segundo grado que pase por el origen de coordenadas y por el punto $(5, 10)$, y que tenga un mínimo en $x = -1/2$.

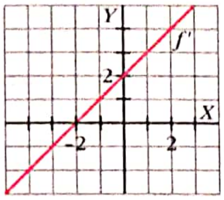
4 La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es $3x - 2y + 6 = 0$. Calcula $f(1)$ y $f'(1)$.

5 Halla los puntos de curvas $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 7x - 3$ en los que las rectas tangentes a f y a g son paralelas.

☛ *En esos puntos se cumple que $f'(x) = g'(x)$.*

6 a) Determina el punto de la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ en el que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(0, -3)$ y $B(2, 1)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en ese punto.

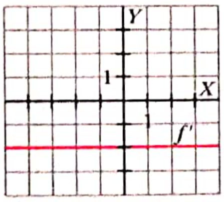
7 

Observa la gráfica de f', que es la función derivada de f.

a) Di cuál es la abscisa del punto singular de f.

b) Señala los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Indica si el punto singular de f es máximo o mínimo.

8 

Esta es la gráfica de la función derivada de f.

a) ¿Tiene f algún punto singular?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

9 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo $(0, \pi)$:

a) $y = 1 - sen\, x$ b) $y = sen^2\, x$ c) $y = tg\, x$

10 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = x\, e^{-x}$

b) $y = \dfrac{e^x}{2x}$

c) $y = ln\,(x^2 + 1)$

d) $y = e^{-x^2}$

Página 26

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$

2. $f(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

4. $f(1) = \frac{9}{2}$, $f'(1) = \frac{3}{2}$

Página 27

5. $P(1, 5)$, $Q(1, 3)$.

6. a) $P(1, 0)$

   b) $y = 2(x - 1)$

7. a) $x = -2$, porque $f'(-2) = 0$.

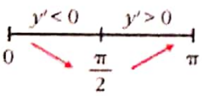
   b) Crecimiento: $(-2, +\infty)$ (donde $f'(x) > 0$)

   Decrecimiento: $(-\infty, -2)$ (donde $f'(x) < 0$)

   c) Es un mínimo porque la curva decrece a la izquierda de $x = -2$ y crece a la derecha.

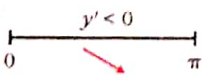
8. a) No, porque $f'(x) \neq 0$ para cualquier valor de x.

   b) Es drecreciente, porque $f'(x) = -2 < 0$ para todo x.

9. a) 

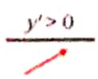
   Crecimiento: $(\pi/2, \pi)$

   Decrecimiento: $(0, \pi/2)$. Mínimo: $(\pi/2, 0)$

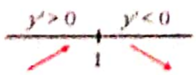
   b) 

   Crecimiento: $(0, \pi/2)$

   Decrecimiento: $(\pi/2, \pi)$. Máximo: $(\pi/2, 1)$

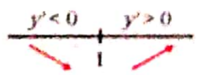
   c) 

   Creciente. No tiene puntos singulares.

10. a) 

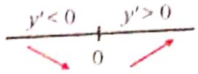
   Crecimiento: $(-\infty, 1)$

   Decrecimiento: $(1, +\infty)$. Máximo: $(1, 1/e)$

   b) 

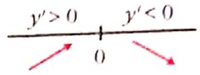
   Crecimiento: $(1, +\infty)$

   Decrecimiento: $(-\infty, 1)$. Mínimo: $(1, e/2)$

c) 

Crecimiento: $(0, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, 0)$. Mínimo: $(0, 0)$

d) 

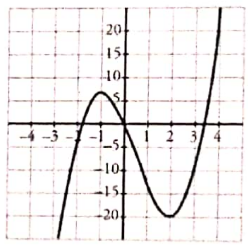
Crecimiento: $(-\infty, 0)$

Decrecimiento: $(0, +\infty)$. Máximo: $(0, 1)$

Página 29

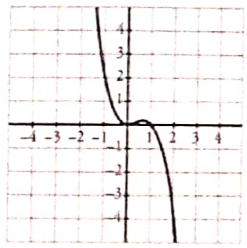
1. a) Máximo $(-1, 7)$

   Mínimo: $(2, -20)$



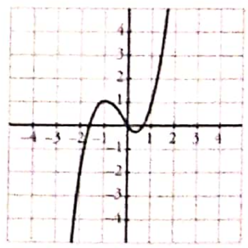
   b) Máximo $(2/3, 4/27)$

   Mínimo: $(0, 0)$



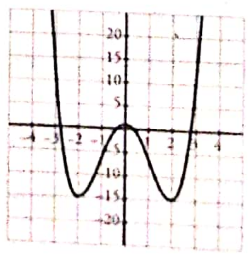
   c) Máximo: $(-1, 1)$

   Mínimo: $(1/3, -5/27)$

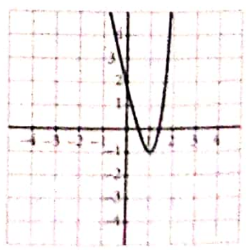


2. a) Máximo: $(0, 1)$,

   Mínimos: $(2, -15)$ y $(-2, -15)$



   b) Mínimo: $(1, -1)$



   c) Máximo: $(0, 1)$

   Mínimo: $(4/3, -197/27)$