3.5 OBTENCIÓN DE TRAMOS EN DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$, la función es creciente.

Si $f'(x) < 0$, la función es decreciente.

Resolviendo cualquiera de esas inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

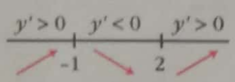
EJERCICIO RESUELTO

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

RESOLUCIÓN

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Resolvemos la inecuación $6x^2 - 6x - 12 > 0$:

$6x^2 - 6x - 12 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow 6(x+1)(x-2) > 0 \rightarrow$ Soluciones: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



Intervalo de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-1, 2)$

El punto $(-1, 7)$ es un **máximo** porque la función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha de ese punto.

$(2, -20)$ es un **mínimo**: la curva decrece a la izquierda de $x = 2$ y crece a la derecha de $x = 2$.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones e indica si sus puntos singulares son máximos o mínimos:

1 a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ b) $y = -3x^4 + 4x^3$

2 a) $y = x^2(1 - x)$ b) $y = x^3 + x^2 - x$

3 a) $y = x^4 - 8x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{(x-2)^5}{16}$

4 a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x$

EJERCICIO RESUELTO

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = \dfrac{x^2+2}{x}$. Indica si sus puntos singulares son máximos o mínimos.

RESOLUCIÓN

$$y' = \frac{x^2+2}{x^2};\quad f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; f(-\sqrt{2}) = \dfrac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \;\rightarrow\; f(\sqrt{2}) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$f'(x) > 0;\ \dfrac{x^2-2}{x^2} > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2 > 0$ (x^2 es positivo para cualquier $x \neq 0$)

$x^2 - 2 > 0 \;\rightarrow$ Soluciones: $\underset{\nearrow}{y'>0}\ \big|_{-\sqrt{2}}\ \underset{\searrow}{y'<0}\ \big|_{\sqrt{2}}\ \underset{\nearrow}{y'>0}$

Intervalo de crecimiento: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Intervalo de crecimiento: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

El punto $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ es un máximo y $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ es un mínimo.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones e indica si sus puntos singulares, si los tienen, son máximos o mínimos:

5 a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

6 a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ b) $y = \dfrac{x+4}{x-1}$

7 a) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

8 a) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

9 a) $y = \dfrac{x^2-2}{x^2+2x}$ b) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$

10 a) $y = \sqrt{x-4}$ b) $y = \sqrt{x^2+1}$

Página 24

1 a)

$y'>0$		$y'<0$		$y'>0$
↗	0	↘	2	↗

Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Intervalo de decrecimiento: $(0, 2)$
Máximo: $(0, 4)$. Mínimo: $(2, 0)$

b)

$y'>0$		$y'>0$		$y'<0$
↗	0	↗	1	↘

Crecimiento: $(-\infty, 1)$. Decrecimiento: $(1, +\infty)$
Máximo: $(1, 1)$

2 a)

$y'<0$		$y'>0$		$y'<0$
↘	0	↗	2/3	↘

Crecimiento: $(0, 2/3)$
Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$
Mínimo: $(0, 0)$. Máximo: $(2/3, 4/27)$

b)

$y'>0$		$y'<0$		$y'>0$
↗	−1	↘	1/3	↗

Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty)$
Decrecimiento: $(-1, 1/3)$
Máximo: $(-1, 1)$. Mínimo $(1/3, -5/27)$

3 a)

$y'<0$		$y'>0$		$y'<0$		$y'>0$
↘	−2	↗	0	↘	2	↗

Crecimiento: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
Decrecimiento: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
Máximo: $(0, 1)$. Mínimo $(2, -15)$ y $(-2, -15)$

b)

$y'>0$		$y'>0$
↗	2	↗

Creciente en $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

4 a)

$y'>0$
↗

Creciente. No tiene máximos ni mínimos.

b)

$y'>0$
↗

Creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Página 25

5 a)

$y'>0$		$y'<0$
↗	0	↘

Crecimiento: $(-\infty, 0)$. Decrecimiento: $(0, +\infty)$
Máximo: $(0, 1)$

b)

$y'<0$		$y'>0$		$y'<0$
↘	−1	↗	1	↘

Crecimiento: $(-1, 1)$
Decrecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Mínimo $(-1, -1/2)$. Máximo: $(1, 1/2)$

6 a)

$y'>0$
↗

Creciente. No tiene máximos ni mínimos.

b)

$y'<0$
↘

Decreciente. No tiene máximos ni mínimos.

7 a)

$y'<0$		$y'>0$
↘	0	↗

Crecimiento: $(0, +\infty)$
Decrecimiento: $(-\infty, 0)$. Mínimo $(0, -1)$

b)

$y'<0$
↘

Decreciente. No tiene máximos ni mínimos.

8 a)

$y'>0$		$y'<0$
↗	0	↘

Crecimiento: $(-\infty, 0)$. Decrecimiento: $(0, +\infty)$
No tiene puntos singulares.

b)

$y'>0$		$y'<0$
↗	0	↘

Crecimiento: $(-\infty, 0)$
Decrecimiento: $(0, +\infty)$. Máximo: $(0, -2)$

9 a)

$y'>0$
↗

Creciente. No tiene puntos singulares.

b)

$y'>0$		$y'<0$		$y'>0$
↗	0	↘	2	↗

Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Decrecimiento: $(0, 2)$
Máximo: $(0, 0)$. Mínimo $(2, 8)$

10 a)

$y'>0$
↗

Creciente. No tiene puntos singulares.

b)

$y'<0$		$y'>0$
↘	0	↗

Crecimiento: $(0, +\infty)$
Decrecimiento: $(-\infty, 0)$. Mínimo $(0, 1)$