

3.4 PUNTOS SINGULARES

- **Puntos singulares** de una función $y = f(x)$ son los puntos de tangente horizontal, es decir, los puntos en los que la derivada es igual a cero.
- Entre ellos están los máximos y los mínimos, pero puede haber otros.
- Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

EJERCICIO RESUELTO

Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ b) $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2}$

RESOLUCIÓN

a) Hallamos: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$6(x^2 - x - 2) = 0. \text{ Soluciones } \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{Calculamos las ordenadas } \begin{cases} f(-1) = 7 \\ f(2) = -20 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $(-1, 7)$ y $(2, -20)$.

b) $f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2+2x-4)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-x^2+4x}{(x^2+x-2)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x}{(x^2+x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x = 0. \quad \text{Soluciones } \begin{cases} x = 0; f(0) = 2 \\ x = 4; f(4) = \frac{10}{9} \end{cases}$$

Los puntos singulares son $(0, 2)$ y $(4, \frac{10}{9})$.

Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

1 a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $y = -3x^4 + 4x^3$

2 a) $y = x^2(1-x)$

b) $y = x^3 + x^2 - x$

3 a) $y = x^4 - 4x + 2$

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$

4 a) $y = x^4 - 8x^2 + 1$

b) $y = \frac{(x-2)^5}{16}$

5 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares:

a) $y = x^3 + 2x$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x$

Halla, si existen, los puntos singulares de las siguientes funciones:

6 a) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 2}{x}$

7 a) $y = \frac{4x^2 - 1}{2x}$

b) $y = \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 5x + 6}$

8 a) $y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$

b) $y = \frac{4 - 2x^2}{x}$

9 a) $y = \operatorname{sen} x, x \in [0, 2\pi)$

b) $y = \operatorname{cos} x, x \in [0, 2\pi)$

10 a) $y = \operatorname{sen}^2 x, x \in [0, 2\pi)$

b) $y = x e^{2x}$

11 a) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

12 a) $y = \sqrt{4x - x^2}$

b) $y = \frac{1}{x} + \ln x$

13 a) $y = x^2 e^{-x}$

b) $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$

- b) $y = 1$
 c) $y = \sqrt{2}$
 d) $y = 3x$
 e) $y = 1 + (x-1) \rightarrow y = x$
 f) $y = \ln \frac{1}{2} - \sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Página 20

- 1 $f'(x) = x^2 - 5x - 3 = 3$
 $x = 6; f(6) = -36; P(6, -36)$
 $x = -1; f(-1) = 1/6; Q(-1, 1/6)$
- 2 $f'(x) = 3x^2 - 7 = 5$
 $x = 2; f(2) = -6; P(2, -6)$
 $x = -2; f(-2) = 6; Q(-2, 6)$
- 3 $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
 $x = 0; f(0) = -1; P(0, -1)$
 $x = 2; f(2) = 5; Q(2, 5)$
- 4 $P(0, 0), Q(2, 8)$

Página 21

- 5 $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4 = -8$
 $x = -2; f'(-2) = 10; P(-2, 10)$
- 6 $P(-3, 1), Q(7, 3)$
- 7 $f'(x) = 9x^2 = \frac{9}{4}$
 $x = \frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-29}{8}; r_1: y = \frac{-29}{8} + \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$
 $x = \frac{-1}{2}; f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-35}{8}; r_2: y = \frac{-35}{8} + \frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- 8 $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$
 $x = 1; f(1) = -3; r_1: y = -3$
 $x = 3; f(3) = 1; r_2: y = 1$
- 9 $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 1 \rightarrow$ No tiene solución.

Página 22

- 1 a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$
 $x = 0; f(0) = 4; P(0, 4)$
 $x = 2; f(2) = 0; Q(2, 0)$

- b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 = 0$
 $x = 0; f(0) = 0; P(0, 0)$
 $x = 1; f(1) = 1; Q(1, 1)$

- 2 a) $P(0, 0); Q\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right)$
 b) $P(-1, 1); Q\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{27}\right)$
- 3 a) $P(1, -1)$
 b) $P(0, 1); Q\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{27}\right)$
- 4 a) $P(0, 1), Q(2, -15), R(-2, -15)$
 b) $P(2, 0)$
- 5 a) $3x^2 + 2 = 0$; No tiene solución.
 b) $x^2 + 2x + 4 = 0$; No tiene solución.

Página 23

- 6 a) $P(0, -1)$
 b) $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), Q(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
- 7 a) $f'(x) = 0 \rightarrow 8x^2 + 2 = 0$.
 No tiene puntos singulares.
 b) $P(-1, -2), Q\left(\frac{-7}{3}, -42\right)$
- 8 a) $P(0, 0), Q\left(-2, \frac{-8}{3}\right)$
 b) No tiene puntos singulares.
- 9 a) $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), Q\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
 b) $P(0, 1), Q(\pi, -1)$
- 10 a) $P(0, 0), Q\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), R(\pi, 0), S\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$
 b) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2e}\right)$
- 11 a) $P(0, 0)$
 b) $\left(e, \frac{1}{e}\right)$
- 12 a) $P(2, 2)$
 b) $P(1, 1)$
- 13 a) $P(0, 0), Q\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$
 b) $P\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), Q\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$