3.2 ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

Para obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0, haremos:

- Cálculo de la ordenada del punto de tangencia $y = f(x_0)$, $P(x_0, f(x_0))$.
- Pendiente de la recta tangente: $f'(x_0)$ (valor de la derivada en $x = x_0$).
- Ecuación en forma punto-pendiente: $\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.

EJERCICIO RESUELTO

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

- Hallamos la ordenada del punto de tangencia: $f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$
- Derivamos la función: $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$
- Calculamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'(1) = -\dfrac{1}{2}$
- Escribimos la ecuación: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(x-1) \;\rightarrow\; x + 2y - 2 = 0$

---

1 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ en los puntos de abscisa -1, 0 y 2.

2 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{3x^2-1}{2x+1}$ en los puntos de abscisa -2, 0 y 1.

3 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \sqrt{x^2+3}$ en los puntos de abscisa -1, 0 y 3.

4 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 - \cos x$ en los puntos de abscisa $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ y π.

5 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = ln\,(x-1)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

6 Halla la ecuación de la recta tangente, en el punto de abscisa $x = 0$, a las siguientes funciones:

a) $y = tg\,x$ b) $y = arc\,tg\,x$ c) $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

7 Halla los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $y = x^3 - 4x$ y escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a dicha función en los puntos obtenidos.

8 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x - 7$ en el punto donde corta al eje de ordenadas.

9 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes, en los siguientes casos:

a) $y = \sqrt{4 + x^2}$ en $x = \dfrac{3}{2}$ b) $y = \sqrt{2x - x^2}$ en $x = 1$

c) $y = sen\,x + cos\,x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$ d) $y = sen\,3x$ en $x = 0$

e) $y = e^{\frac{x-1}{x}}$ en $x = 1$ f) $y = ln\,(1 - sen\,x)$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$

Página 17

4 $f'(x) = \frac{1}{2x}; f'(1) = \frac{1}{2}; f'(2) = \frac{1}{4};$

$f'(3) = \frac{1}{6};\ f'(4) = \frac{1}{8}$

5 $f'(x) = 2\ sen\ x\ cos\ x;\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2};\ f'(\pi) = 0$

6 a) $f'(x) = e^{2x+1}(1 + 2x);\ f'(-2) = -3e^{-3} \simeq$

$\simeq -0{,}15;\ f'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0;\ f'(1) = 3e^3 \simeq 60{,}26$

b) Decreciente en $x = -2$; Creciente en $x = 1$.

En $x = \frac{-1}{2}$ no crece ni decrece.

7 $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4};\ f'(-2) = \frac{-4}{17}$ (Decreciente);

$f'(0) = 0$ (No crece, ni decrece).

$f'(1) = 1$ (Creciente).

$f'(3) = 3/41$ (Creciente).

8 $f'(x) = cos^2 x - sen^2 x;\ \ m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;\ m = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2};\ m = f'(\pi) = 1$

9 $f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}};\ f'(-2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

f es creciente en $x = -2$; la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = -2$ es $m = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$f'(3) = \frac{-1}{6\sqrt{2}}$; f decrece en $x = 3$. Pendiente de la recta tangente, $m = \frac{-1}{6\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{12}$.

Página 18

1 $f'(x) = 6x^2 - 6x$

En $x = -1$, $f(-1) = -4$ y $f'(-1) = 12$.

Ecuación: $y = -4 + 12(x + 1)$

En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

Ecuación: $y = 1$

En $x = 2$, $f(2) = 5$ y $f'(2) = 12$.

Ecuación: $y = 5 + 12(x - 2)$

2 $f'(x) = \frac{6x^2 + 6x + 2}{(2x + 1)^2}$

En $x = -2$: $y = \frac{-11}{3} + \frac{14}{9}(x + 2)$

En $x = 0$: $y = -1 + 2x$

En $x = 1$: $y = \frac{2}{3} + \frac{14}{9}(x - 1)$

3 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

En $x = -1$: $y = 2 - \frac{1}{2}(x + 1)$

En $x = 0$: $y = \sqrt{3}$

En $x = 3$: $y = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 3)$

4 $f'(x) = sen\ x$

En $x = \frac{\pi}{3}$: $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

En $x = \frac{\pi}{2}$: $y = 1 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

En $x = \pi$: $y = 2$

Página 19

5 $f'(x) = \frac{1}{x - 1}$

En $x = z$, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 1$.

Ecuación: $y = x - 2$

6 a) $f'(x) = 1 + tg^2 x$; $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Ecuación: $y = x$

b) $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Ecuación: $y = x$

c) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Ecuación: $y = x$

7 Puntos de corte con OX: (0, 0), (–2, 0) y (2, 0)

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(0) = -4$ Ecuación: $y = -4x$

$f'(-2) = 8$ Ecuación: $y = 8(x + 2)$

$f'(2) = 8$ Ecuación: $y = 8(x - 2)$

8 Corte con OY: $(0, -7)$; $f'(x) = x^2 - 5x + 3$;

$f'(0) = 3$. Ecuación $y = -7 + 3x$

9 a) $y = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

b) $y = 1$

c) $y = \sqrt{2}$

d) $y = 3x$

e) $y = 1 + (x - 1) \rightarrow y = x$

f) $y = ln\,\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Página 20

1. $f'(x) = x^2 - 5x - 3 = 3$
   $x = 6;\ f(6) = -36;\ P(6, -36)$
   $x = -1;\ f(-1) = 1/6;\ Q(-1, 1/6)$

2. $f'(x) = 3x^2 - 7 = 5$
   $x = 2;\ f(2) = -6;\ P(2, -6)$
   $x = -2;\ f(-2) = 6;\ Q(-2, 6)$

3. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
   $x = 0;\ f(0) = -1;\ P(0, -1)$
   $x = 2;\ f(2) = 5;\ Q(2, -5)$

4. $P(0, 0),\ Q(2, 8)$

Página 21

5. $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 4 = -8$
   $x = -2;\ f'(-2) = 10;$ P $(-2, 10)$

6. $P(-3, 1),\ Q(7, 3)$

7. $f'(x) = 9x^2 = \dfrac{9}{4}$
   $x = \dfrac{1}{2};\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-29}{8};\ r_1\!: y = \dfrac{-29}{8} + \dfrac{9}{4}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$
   $x = \dfrac{-1}{2};\ f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{-35}{8};\ r_2\!: y = \dfrac{-35}{8} + \dfrac{9}{4}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

8. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$
   $x = 1;\ f(1) = -3;\ r_1\!: y = -3$
   $x = 3;\ f(3) = 1;\ r_2\!: y = 1$

9. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 1 \rightarrow$ No tiene solución.

Página 22

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$
   $x = 0;\ f(0) = 4;\ P(0, 4)$
   $x = 2;\ f(2) = 0;\ Q(2, 0)$

   b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 = 0$
   $x = 0;\ f(0) = 0;\ P(0, 0)$
   $x = 1;\ f(1) = 1;\ Q(1, 1)$

2. a) $P(0, 0);\ Q\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$

   b) $P(-1, 1);\ Q\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-5}{27}\right)$

3. a) $P(1, -1)$

   b) $P(0, 1);\ Q\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-5}{27}\right)$

4. a) $P(0, 1),\ Q(2, -15),\ R(-2, -15)$

   b) $P(2, 0)$

5. a) $3x^2 + 2 = 0;$ No tiene solución.

   b) $x^2 + 2x + 4 = 0;$ No tiene solución.

Página 23

6. a) $P(0, -1)$
   b) $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),\ Q(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

7. a) $f'(x) = 0 \rightarrow 8x^2 + 2 = 0.$
   No tiene puntos singulares.

   b) $P(-1, -2),\ Q\left(\dfrac{-7}{3}, -42\right)$

8. a) $P(0, 0),\ Q\left(-2, \dfrac{-8}{3}\right)$

   b) No tiene puntos singulares.

9. a) $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right),\ Q\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$
   b) $P(0, 1),\ Q(\pi, -1)$

10. a) $P(0, 0),\ Q\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right),\ R(\pi, 0),\ S\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$

    b) $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2e}\right)$

11. a) $P(0, 0)$
    b) $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

12. a) $P(2, 2)$
    b) $P(1, 1)$

13. a) $P(0, 0),\ Q\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

    b) $P\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right),\ Q\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$