3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1 CÁLCULO DE LA DERIVADA EN UN PUNTO

La derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** a la curva en ese punto, y mide el **crecimiento** o **decrecimiento** de la función en ese lugar.

Cálculo del valor de la derivada en varios puntos $x = a$, $x = b$, ...:

- Se obtiene la expresión general de $f'(x)$.
- Se sustituye en $f'(x)$ la x por a, b, ...

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}$ en los puntos de abscisas 1, 1/2 y –1. Interpreta los resultados.

Resolución

Aplicamos las reglas de derivación para obtener $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}} \cdot \frac{3x-(3x-1)}{x^2} = \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{3x-1}}$$

Sustituimos x por 1, 1/2 y –1:

- $f'(1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ es la pendiente de la tangente a la curva en $x = 1$
  La función crece $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ en $x = 1$.
- $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2 \cdot 1/4}\sqrt{\dfrac{1/2}{3/2-1}} = 2$; Pendiente de la tangente en $x = 1/2$: $m = 2$
  La curva crece 2 en $x = 1/2$.
- $f'(-1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{-4}} = \dfrac{1}{4}$; Pendiente de la tangente en $x = -1$: $m = 1/4$
  La curva crece 1/4 en $x = -1$.

1 Halla la derivada de la función $y = \dfrac{5x-x^2}{x-2}$ en los puntos de abscisa –1, 3 y 5.

2 Halla la derivada de la función $y = \left(\dfrac{x}{3}+1\right)^4$ en los puntos de abscisa –4, –3, 0 y 1.

3 Calcula $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$ siendo $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4 Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = ln\sqrt{x}$ en los puntos de abscisa 1, 2, 3 y 4.

5 Calcula el crecimiento o decrecimiento de la función $y = sen^2 x$ en los puntos de abscisa $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ y π.

6 Dada la función $y = x\,e^{2x+1}$, halla:

a) La pendiente de la recta tangente en los puntos de abscisa -2, $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

b) Indica si la función es creciente o decreciente en esos puntos.

7 Halla la derivada de la función $y = arc\,tg\,x^2$ en los puntos de abscisa -2, 0, 1 y 3 e indica si la función es creciente o decreciente en esos puntos.

8 Calcula la pendiente de la recta tangente a la función $y = sen\,x\cos x$ en los puntos de abscisa $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ y π.

9 Halla la función derivada de la función $y = arc\,sen\,\frac{1}{x}$ y su valor en los puntos de abscisa -2 y 3. Interpreta los resultados obtenidos.

32 $f'(x) = \dfrac{e^{5x+1} \cdot 5 \cdot (x+2) - e^{5x+1} \cdot 1}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{e^{5x+1}(5x+9)}{(x+2)^2}$

33 $f'(x) = \dfrac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$

34 $f'(x) = \dfrac{(e^x + x e^x)(x+2) - x e^x}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{(x^2 + 2x + 2) e^x}{(x+2)^2}$

35 $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (3x+4) - \sqrt{x-1} \cdot 3}{(3x+4)^2} =$

$= \dfrac{-3x+2}{2\sqrt{x-1}\,(3x+4)^2}$

36 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+1}{x+2}}} \cdot \dfrac{3(x+2) - (3x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{x+2}}{2\sqrt{3x+1}} \cdot \dfrac{5}{(x+2)^2}$

37 $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + (x^2+2)^2} = \dfrac{2x}{x^4 + 4x^2 + 5}$

38 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{arc\,tg\,x}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arc\,tg\,x}}$

39 $f'(x) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{-4x^2+4x}}$

40 $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$

Página 16

1 $f'(x) = \dfrac{-x^2+4x-10}{(x-2)^2}$, $f'(1) = \dfrac{-15}{9}$;

$f'(3) = -7$; $f'(5) = \dfrac{-15}{9}$

2 $f'(x) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^3$, $f'(-4) = \dfrac{-4}{81}$; $f'(-3) = 0$;

$f'(0) = \dfrac{4}{3}$; $f'(1) = \dfrac{256}{81}$

3 $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f'(-2) \simeq 3{,}63$; $f'(0) = 0$;

$f'(3) = 10{,}02$

Página 17

4 $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$; $f'(1) = \dfrac{1}{2}$; $f'(2) = \dfrac{1}{4}$;

$f'(3) = \dfrac{1}{6}$; $f'(4) = \dfrac{1}{8}$

5 $f'(x) = 2\,sen\,x\,cos\,x$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

$f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$; $f'(\pi) = 0$

6 a) $f'(x) = e^{2x+1}(1+2x)$; $f'(-2) = -3e^{-3} \simeq$

$\simeq -0{,}15$; $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 0$; $f'(1) = 3e^3 \simeq 60{,}26$

b) Decreciente en $x = -2$; Creciente en $x = 1$.

En $x = \dfrac{-1}{2}$ no crece ni decrece.

7 $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$; $f'(-2) = \dfrac{-4}{17}$ (Decreciente);

$f'(0) = 0$ (No crece, ni decrece).

$f'(1) = 1$ (Creciente).

$f'(3) = 3/41$ (Creciente).

8 $f'(x) = cos^2 x - sen^2 x$; $m = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

$m = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$; $m = f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{2}$; $m = f'(\pi) = 1$

9 $f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $f'(-2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

f es creciente en $x = -2$; la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = -2$ es $m = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$f'(3) = \dfrac{-1}{6\sqrt{2}}$; f decrece en $x = 3$. Pendiente de la recta tangente, $m = \dfrac{-1}{6\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{12}$.

Página 18

1 $f'(x) = 6x^2 - 6x$

En $x = -1$, $f(-1) = -4$ y $f'(-1) = 12$.

Ecuación: $y = -4 + 12(x+1)$

En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

Ecuación: $y = 1$

En $x = 2$, $f(2) = 5$ y $f'(2) = 12$.

Ecuación: $y = 5 + 12(x-2)$