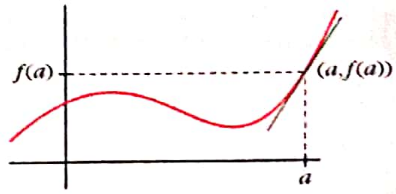
1.2 DERIVADA EN UN PUNTO POR PASO AL LÍMITE. FUNCIÓN DERIVADA

- Dada una función, $y = f(x)$, y un punto, $(a,\ f(a))$, se define la **derivada de $f(x)$ en $x = a$** como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si llamamos $x - a = \mathrm{h}$, entonces la definición queda así:

$$f'(a) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(a + \mathrm{h}) - f(a)}{\mathrm{h}}$$



- $f'(a)$ es la **pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y mide el **crecimiento de la función en ese punto.**

EJERCICIO RESUELTO

Halla, a partir de la definición, la derivada de cada una de estas funciones en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

RESOLUCIÓN

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1+h)^2 - 1) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h^2 + 2h) - 1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 2h^2 + 4h - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2h + 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 4) = 4$$

Por tanto: $f'(1) = 4$

b) $$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{(1+h)+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{h+2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2 - h - 2}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{h+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto: $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

1 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2 Halla, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = 2x - x^2$ en los puntos de abscisas 0 y -1.

3 Calcula, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en los puntos de abscisa 1 y 2.

4 Obtén, a partir de la definición, la derivada de la función $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en el punto $(-1, 1)$.

5 Calcula, utilizando la definición de derivada, el valor de $f'(1)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x+1}{3}$.

6 Halla la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 3 - x^2$ en el punto $(1, 2)$.

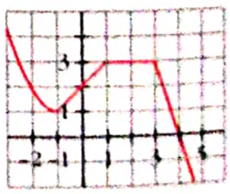
7 Dada la función $f(x) = x^2 - 1$:

a) Calcula T.V.M. $[2, 2 + h]$.

b) Halla $\lim_{h \to 0}$ (T.V.M. $[2, 2 + h]$).

c) ¿Qué relación hay entre este limite y $f'(2)$?

8 La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. A partir de ella, calcula las derivadas que se indican:



a) $f'(-1)$

b) $f'(2)$

c) $f'(4)$

9 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$.

Función derivada:

Llamamos **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJERCICIO RESUELTO

a) Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

b) Calcula $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(1,5)$.

RESOLUCIÓN

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h + 1 - x^2 + 3x - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x - 3) = 2x - 3$$

b) Como ya tenemos $f'(x)$, los resultados son inmediatos:

$f'(0) = -3$; $f'(-1) = -5$; $f'(2) = 1$; $f'(1,5) = 0$

10 Halla, a partir de la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 1$ → $f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{5}$ → $f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{2}$ → $f'(x) =$

d) $f(x) = x$ → $f'(x) =$

e) $f(x) = x^2$ → $f'(x) =$

f) $f(x) = 4$ → $f'(x) =$

g) $f(x) = \dfrac{3}{2}$ → $f'(x) =$

h) $f(x) = 2x^2 - x$ → $f'(x) =$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ → $f'(x) =$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ → $f'(x) =$

k) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ → $f'(x) =$

Página 6

1 $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 7$

2 $f'(0) = 2;\ f'(-1) = 4$

3 $f'(1) = -2;\ f'(2) = \dfrac{-1}{2}$

4 $f'(-1) = -1$

5 $f'(1) = \dfrac{4}{3}$

6 $f'(1) = -2$

7 a) T.V.M. $[2,\ 2+h] = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 4$

b) $\lim\limits_{h \to 0} (h + 4) = 4$

c) Es lo mismo.

8 a) $f'(-1) = 0$ (la recta tangente en $x = -1$ tiene pendiente 0, pues es horizontal).

b) $f'(2) = 0$ (la recta tangente es horizontal, luego tiene pendiente 0).

c) $f'(4)$ es la pendiente de la recta que pasa por $(3, 3)$ y $(4, 0)$:

$$f'(4) = \frac{0-3}{4-3} = \frac{-3}{1} = -3$$

9 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + h^2 + 2ah - a^2}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2a)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2a) = 2a$$

Página 7

10 a) $f'(x) = 3$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{5}$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{2}$

d) $f'(x) = 1$

e) $f'(x) = 2x$

f) $f'(x) = 0$

g) $f'(x) = 0$

h) $f'(x) = 4x - 1$

i) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{-6}{(3x-1)^2}$