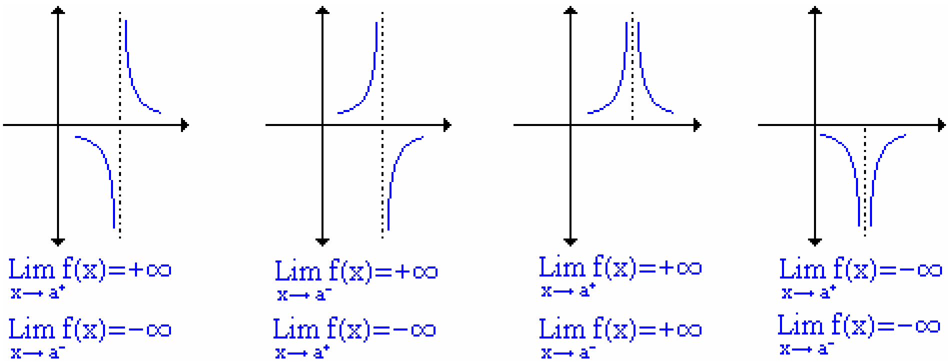
Asíntotas

Son rectas a las que se aproxima la gráfica de la función sin llegar a superponerse. Las asíntotas se clasifican en:

$$\begin{cases} \text{Verticales; Puntos de discontinuidad} \\ \text{Generales; Tendencias en el } \infty : \begin{cases} \text{Horizontal, tendencia convergente} \\ \text{Oblicua, tendencia divergente estable} \end{cases} \end{cases}$$

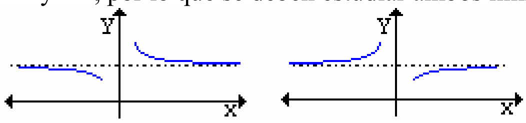
Verticales.

Son rectas de la forma x = x_0. Sí $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ en x = x_0, existe una asíntota vertical. En los puntos de asíntota vertical es necesario estudiar los límites laterales, para poder conocer el comportamiento de la función en las proximidades de la asíntota, pudiéndose presentar los siguientes casos:



Horizontales.

Sí $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ (nº finito) en y = L, existe una asíntota horizontal. La asíntota horizontal no tiene porque coincidir hacia +∞ y –∞, por lo que se deben estudiar ambos límites por separado

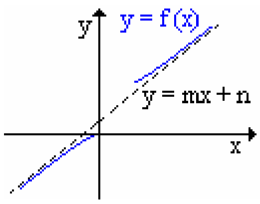


Se puede estimar la posición de la asíntota respecto de la función, para ello en calcula:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - L) = \begin{cases} = 0^+ \Rightarrow f(x) > L & \text{La función está por encima de la asíntota} \\ = 0^- \Rightarrow f(x) < L & \text{La función está por debajo de la asíntota} \end{cases}$$

Oblicua.

Tienen la forma y = m·x + n donde: $\begin{cases} m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - m \cdot x] \end{cases}$



Se puede estimar la posición de la asíntota respecto de la función, para ello en calcula:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = \begin{cases} = 0^+ \Rightarrow f(x) > \text{Asínt.} & \text{La función está por encima de la asíntota} \\ = 0^- \Rightarrow f(x) < \text{Asínt.} & \text{La función está por debajo de la asíntota} \end{cases}$$

Observaciones

a) Las funciones polinómicas no tienen ningún tipo de asíntotas.

b) Si existen asíntotas horizontales no hay oblicuas o viceversa.

c) La gráfica de una función no puede cortar a las asíntotas verticales, pero sí, a las horizontales ó a las oblicuas. Para calcular el corte con las asíntotas horizontales u oblicuas basta resolver el sistema: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + n \end{cases}$

d) En las funciones de tipo racional se puede saber de antemano si van ha existir asíntotas horizontales u oblicuas, estudiando los grados del numerador y denominador.

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$: GRADO P(x) − GRADO Q(x) =

	Horizontal	Oblicua.	Ejemplo
>1	No	No	$f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$
$=1$	No	Si	$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+2}$
<1	Si	No	$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$; $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Si existen asuntotas oblicuas la forma mas sencilla es dividir la expresión por el método de la caja, siendo en ese caso la asíntota la expresión del cociente igualada a y.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array}$$

Asintota oblicua : $y = C(x)$

Ejemplo: Calcular la asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+2}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x & x+2 \\ \cline{2-2} -x^2 - 2x & x-3 \\ \cline{1-1} \diagup \; -3x & \\ 3x + 6 & \\ \cline{1-1} \diagup \; +6 & \end{array}$$

Asíntota oblicua: $y = x - 3$

Posición relativa. Para estudiar la posición relativa no es imprescindible hacer el estudio mediante límites, se puedan dar valores a la función y a la asíntota para conocer sus posiciones relativas.

- $x \to -\infty : x = -100 : \begin{cases} \text{Función} : y = \dfrac{(-100)^2 - (-100)}{(-100)+2} = -103{,}1 \\ \text{Asíntota} : y = -100 - 3 = -103 \end{cases}$: Función < Asíntota . La función se aproxima por debajo de la asíntota.
- $x \to \infty : x = 100 : \begin{cases} \text{Función} : y = \dfrac{100^2 - 100}{100+2} = 97{,}1 \\ \text{Asíntota} : y = 100 - 3 = 97 \end{cases}$: Función > Asíntota . La función se aproxima por encima de la asíntota.