2.10 CONTINUIDAD DE FUNCIONES A PARTIR DE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

- En la página 24 recordábamos cómo estudiar la continuidad de una función a partir de su gráfica. En este apartado recordaremos cómo hacer este mismo estudio a partir de su expresión analítica.
- Una función $f(x)$ **es continua en** $x = c$ cuando $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.
- Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas.
- **Tipos de discontinuidad en un punto:** (revisa la página 24)

① Si alguno de los límites laterales (o los dos) son infinitos:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces:

$f(x)$ tiene una **discontinuidad infinita en** $x = a$ **(asíntota vertical en** $x = a$**).**

② Si existen y son finitos los límites laterales, pero no coinciden:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow$ no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, entonces:

$f(x)$ tiene una **discontinuidad de salto finito en** $x = a$.

③ Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$, es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, y además $f(a) \neq l$, entonces:

$f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable en** $x = a$.

EJERCICIO RESUELTO

Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$$

Representa los resultados obtenidos.

RESOLUCIÓN

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$. $f(x)$ es continua en su dominio. Veamos los tipos de discontinuidades:

- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

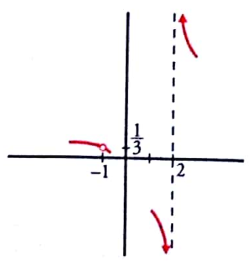
  Discontinuidad evitable en $x = -1$.

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2} = \left(\dfrac{2}{0}\right)$.

  Discontinuidad infinita en $x = 2$. (Asíntota vertical en $x = 2$).

  Para representar este último resultado, hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



1 Estudia la continuidad de las siguientes funciones. En los puntos en los que no sean continuas, indica el tipo de discontinuidad que presentan. Representa los resultados obtenidos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 3x}$

EJERCICIO RESUELTO

Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta.

Resolución

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x + 1) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x). \\ \text{Discontinuidad de salto finito en } x = 0. \end{array}$$

- En $x = 1$:

No existe $f(1) \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x + 1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4. \\ \text{Discontinuidad evitable en } x = 1. \end{array}$$

2 Estudia la continuidad de estas funciones. En los puntos en los que no sean continuas, indica el tipo de discontinuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x + 4 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x + 2}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 1}{2} & \text{si } x \le 1 \\ 2^x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3 Halla el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + mx - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.