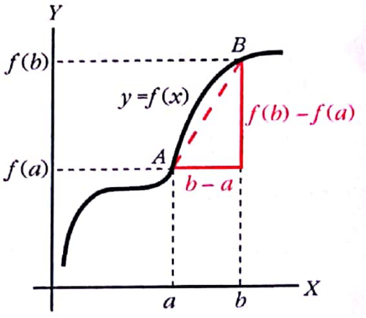
1 CONCEPTO DE DERIVADA

1.1 TASA DE VARIACIÓN MEDIA

- La **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$, en un intervalo $[a, b]$ se define de la siguiente manera:

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- La T.V.M. $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.
- La T.V.M. $[a, b]$ representa el crecimiento medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
- Si designamos el intervalo como $[a, a + \text{h}]$ (h es la longitud del intervalo), entonces queda:

$$\text{T.V.M. } [a, a + \text{h}] = \frac{f(a + \text{h}) - f(a)}{\text{h}}$$

1 Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en cada uno de los siguientes intervalos:

a) $[-1, 1]$ b) $[-1, 2]$ c) $[0, 2]$ d) $[1, 3]$

2 Halla la T.V.M. de la función $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos:

a) $[0, 3]$ b) $[-1, 2]$ c) $[1; 1{,}5]$ d) $[a, b]$

Interpreta los resultados obtenidos.

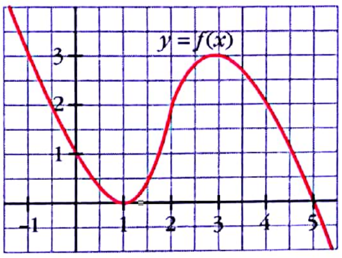
3 Halla la T.V.M. de esta función en los intervalos que se indican:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 3]$

c) $[0, 2]$

d) $[3, 5]$



4 Halla la T.V.M. de la función $f(x) = 2^x$ en el intervalo $[0, 3]$. ¿Cómo es la función en ese intervalo, creciente o decreciente?

5 Calcula la T.V.M. de cada una de las siguientes funciones en el intervalo $[0, 2]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = 1 - x^2$ c) $h(x) = 3^x$ d) $i(x) = \dfrac{1}{x+1}$

6 Halla, con ayuda de la calculadora, la T.V.M. de la función $f(x) = x^2$ en cada uno de estos intervalos:

a) $[2;\ 2{,}01]$ b) $[2;\ 2{,}001]$ c) $[2;\ 2{,}0001]$

(toma $h = 0{,}01$)

¿A qué valor se aproxima la T.V.M. $[2, 2 + h]$ cuando h es "muy pequeño"?

7 a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$ en el intervalo $[2, 2 + h]$.

b) ¿Qué significado tiene h en ese intervalo?

c) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. $[2, 2 + h]$ cuando la longitud del intervalo se hace "muy pequeña"?

8 a) Halla la T.V.M. de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.

b) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. $[1, 1 + h]$ cuando h se acerca a cero?

9 a) Halla la T.V.M. de la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.

b) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. $[1, 1 + h]$ cuando la longitud del intervalo se hace "muy pequeña"?

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Página 3

1 a) $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = -2$ b) $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = -1$

c) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = 0$ d) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2$

2 a) $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = 3$ b) $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = 3$

c) $\dfrac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = 3$

d) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{3b-2-(3a-2)}{b-a} = \dfrac{3b-3a}{b-a} =$

$= \dfrac{3(b-a)}{(b-a)} = 3$

$f(x)$ es creciente. Su gráfica es una recta de pendiente 3. Por eso, la tasa de variación media es 3 en cualquier intervalo.

3 a) $\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{1-3}{1} = -2$

b) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{3-0}{2} = 1{,}5$

c) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{2-1}{2} = 0{,}5$

d) $\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3} = \dfrac{0-3}{2} = -1{,}5$

4 T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{8-1}{3} = \dfrac{7}{3} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Es creciente.

Página 4

5 a) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = 2 > 0 \rightarrow$ Crece

b) $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0} = -2 < 0 \rightarrow$ Decrece

c) $\dfrac{h(2)-h(0)}{2-0} = 4 > 0 \rightarrow$ Crece

d) $\dfrac{i(2)-i(0)}{2-0} = \dfrac{-1}{3} < 0 \rightarrow$ Decrece

6 a) $\dfrac{f(2{,}01)-f(2)}{0{,}01} = 4{,}01$

b) $\dfrac{f(2{,}001)-f(2)}{0{,}001} = 4{,}001$

c) $\dfrac{f(2{,}0001)-f(2)}{0{,}0001} = 4{,}0001$

Cuando h es "muy pequeño", la T.V.M. [2, 2 + h] se aproxima a 4.

7 a) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{1}{2}$

b) Es la longitud del intervalo.

c) Se aproxima a $\dfrac{1}{2}$ ($f(x)$ corresponde a una recta de pendiente $\dfrac{1}{2}$).

8 a) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = h + 2$

b) Se aproxima a 2.

9 a) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{-3}{1+h}$

b) Se aproxima a -3.

Página 6

1 $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7$

2 $f'(0) = 2;\ f'(-1) = 4$

3 $f'(1) = -2;\ f'(2) = \dfrac{-1}{2}$

4 $f'(-1) = -1$

5 $f'(1) = \dfrac{4}{3}$

6 $f'(1) = -2$

7 a) T.V.M. $[2, 2+h] = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = h + 4$

b) $\lim\limits_{h \to 0} (h+4) = 4$

c) Es lo mismo.

8 a) $f'(-1) = 0$ (la recta tangente en $x = -1$ tiene pendiente 0, pues es horizontal).