

## Función inversa o recíproca $f^{-1}(x)$

Se cumple  $(f(x) \circ f^{-1}(x)) = x$   $i(x)$  se llama función identidad,  $i(x) = x$

### Relación entre una función y su recíproca

- Son funciones simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
- Es interesante para calcular el recorrido de una función cuando no tenemos la gráfica.  
El dominio de la función recíproca es el conjunto imagen (recorrido) de la original.

### Ejemplos

#### 1- Calcular la función recíproca de $f(x) = 2x + 5$

##### - Cálculos

Para calcular una función inversa de otra, donde hay "x" ponemos "y", donde hay "y" ponemos "x" (respetando los exponentes). Despejamos la nueva "y", esa función es la recíproca.

Para resolver mejor, en lugar de poner  $f(x)$  vamos a escribir  $y = 2x + 5$ .

$$y = 2x + 5 \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = 2y + 5 \xrightarrow{\text{Despejamos}} y = \frac{x-5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

##### - Comprobamos

$$(f(x) \circ f^{-1}(x)) = x \Rightarrow 2 \left( \frac{x-5}{2} \right) + 5 = x - 5 + 5 = x$$

Obtenemos la función identidad, entonces  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$  son recíprocas.

#### 2- Calcular la función recíproca de $f(x) = x^3 - 6$

$$y = x^3 - 6 \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = y^3 - 6 \xrightarrow{\text{Despejamos}} y = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$$

$$\text{Comprobamos } (f(x) \circ f^{-1}(x)) = x \Rightarrow (\sqrt[3]{x+6})^3 - 6 = (x+6) - 6 = x$$

#### 3- Calcular la función recíproca de $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

$$y = \frac{x+3}{x-2} \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = \frac{y+3}{y-2} \xrightarrow{\text{Despejamos}} x(y-2) = y+3 \Rightarrow$$

$$xy - 2x = y + 3 \Rightarrow xy - y = 2x + 3 \Rightarrow y(x-1) = 2x + 3 \Rightarrow y = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\text{Comprobamos } (f(x) \circ f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{\frac{2x+3}{x-1} + 3}{\frac{2x+3}{x-1} - 2} = \frac{\frac{2x+3+3x-3}{x-1}}{\frac{2x+3-2x+2}{x-1}} = \frac{5x}{5} = x$$

Ejercicios

· Calcular la inversa  $[f^{-1}(x)]$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1}{2x+6}$

b)  $f(x) = 4-x^2$

c)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2-x}}$

e)  $f(x) = x^3+5$

f)  $f(x) = \frac{5x-3}{2-x}$

g)  $f(x) = e^{1-x^2}$

h)  $f(x) = \text{Ln} \frac{x-1}{x-2}$