3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^5+2x^4+3}{2x^5+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+2x^4+3}{-2x^5-3x}=\dfrac{1}{-2}=\dfrac{-1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=+\infty\Rightarrow$ No existe límite

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{2x+5}\right)^5=(+\infty)^5=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1}=\dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x+1)}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x+1)}{x-1}=+\infty\Rightarrow$ No existe límite

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{4x^5+2x}=+\infty$; porque la exponencial es un infinito de orden superior a cualquier polinomio.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{x-5}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3-3x}{x^2+2}=-\infty$

11) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-(x+1)\,(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-x^2-3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=\dfrac{-6}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=-\infty\Rightarrow$ No existe el límite

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-3}{3x+5}\right)^{2x}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{5}{3}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$

16) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+5)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x+5}=\dfrac{5}{7}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2\,(x-1)-3x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3x^2-3x^3}{x^2-1}==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{x^2-1}=\dfrac{-3}{1}=-3$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{5x+1}\right)^{3x+1}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{+\infty}=0$

CONTINUIDAD

EJERCICIO 12 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2^x & \text{si } x<0 \\ x^2-x-1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 1+\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{3} & \text{si } x<-1 \\ e^{x^2-1} & \text{si } -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 3^x & \text{si } x<0 \\ -x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

e) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$

f) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 4 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

g) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}$

h) $f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{si } x<-1 \\ x^2-2 & \text{si } -1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Solución:

a)

- Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x^2-2^x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-x-1\right)=1 \\ f(0)=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua} \\ \text{en } x=0 \end{array}$

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x-1\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\ln x\right)=1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}=\dfrac{x\,(x-3)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$

- Dominio = **R** - {2, 3} $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en **R** - {2, 3}.
- En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad infinita en $x = 2$.
- En $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\,(x+1)}{x+2}=\dfrac{12}{5}$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad evitable en $x = 3$.

c)

- Si $x\neq -1$ y $x\neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En $x = -1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^2-1}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} e^{x^2-1}=1 \\ f(-1)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Hay una discontinuidad} \\ \text{de salto finito en } x=-1. \end{array}$

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x^2-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$.

d)

- *Dominio* = **R** ⇒Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 0$

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+2) = 3 \end{array}\right\}$ Hay una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$

e)

- Dominio: $x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$ ⇒ *Dominio* = **R** – {–5, 2}

- $f(x)$ es continua en **R** – {–5, 2}

- En x = -5: $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = \lim\limits_{x\to -5} \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \lim\limits_{x\to -5} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-11}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$

Discontinuidad infinita en $x = -5$. Hay una asíntota vertical.

- En x = 2: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{10}{7} \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x = 2$.

f)

- *Dominio* = **R**

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(3x^2 + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 0$

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(3x^2 + 1\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$

- Por tanto, $f(x)$ es continua en **R**.

g)

- *Dominio* = **R** – {–1, 1}⇒ $f(x)$ es continua en **R** – {–1, 1}

- En x = -1: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \to$

Discontinuidad evitable en $x = -1$

- En x = 1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{-4}{(0)}$. Hallamos los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ Discontinuidad infinita en $x = 1$. Hay una asíntota vertical.

h)

- *Dominio* = **R**
- Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- En $x = -1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x-3) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-2) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = -1$
- En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no es continua en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\Rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcula el valor de *a* para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + 2^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3a + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **g)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Solución:

a)

- Si $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- En $x = -1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2x^3 - x^2 + a) = a - 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 + ax + 1) = 2 - a \\ f(-1) = 2 - a \end{cases}$
- Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de tenerse que: $a - 3 = 2 - a \;\rightarrow\; 2a = 5 \;\rightarrow\; a = \dfrac{5}{2}$

b)

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x^2 + ax - 1) = a - 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x - a) = 3 - a \\ f(1) = 3 - a \end{cases}$
- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de tenerse que: $a - 2 = 3 - a \;\rightarrow\; 2a = 5 \;\rightarrow\; a = \dfrac{5}{2}$

c)

- Si $x \neq 2$ $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - a) = 6 - a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x^2 + ax) = 8 + 2a \\ f(2) = 8 + 2a \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser: $6 - a = 8 + 2a \;\rightarrow\; -2 = 3a \;\rightarrow\; a = \frac{-2}{3}$

d)

- Si x = 1 $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2 + 3x - 1\right) = a + 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(3a + 2^x\right) = 3a + 2 \\ f(1) = a + 2 \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $a + 2 = 3a + 2 \;\Rightarrow\; -2a = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$

e)

- Si $x \neq 1$ $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2 - 2x + a\right) = 2a - 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(4x^2 + ax + 6\right) = a + 10 \\ f(1) = a - 2 \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $2a - 2 = a + 10 \;\Rightarrow\; a = 12$

f)

- Si $x \neq 1$ $\Rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(2^x + a\right) = 2 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(x^2 - 3a + 5\right) = 6 - 3a \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $2 + a = 6 - 3a \;\Rightarrow\; 4a = 4 \;\Rightarrow\; a = 1$

g)

- Si $x \neq 2$ $\Rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En x = 2 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} k = k \\ f(2) = k \end{array}\right\}$

Por tanto, ha de ser $k = 3$.

<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ ax & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En x = -1: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2x^3 - x^2 + a) = a - 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 + bx + 1) = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{cases} \Rightarrow$

Para que sea continua en *x* = -1, ha de ser *a* -3 = 2 - *b*.

- En *x* = 1: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + bx + 1) = b + 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax) = a \\ f(1) = a \end{cases}$

Para que sea continua en *x* = 1, ha de ser *a* = *b* + 2.

Uniendo las dos condiciones anteriores, *f* (*x*) será continua si: $\begin{cases} a - 3 = 2 - b \\ a = b + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla el valor de *k* para que la siguiente función sea continua en *x* = 2:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que *f* (*x*) sea continua en *x* = 2, ha de tenerse que: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2 (3x+1)}{(x-2)^2 (4x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{4x+2} = \frac{7}{10}$$

f (2) = *k*

- Por tanto, ha de ser: $k = \frac{7}{10}$

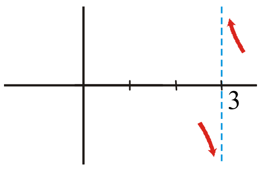
ASÍNTOTAS

<u>EJERCICIO 16</u> : Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

Solución: $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$



<u>EJERCICIO 17</u> : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$