- En x = -1: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(2x^3 - x^2 + a\right) = a - 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2 + bx + 1\right) = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{cases} \Rightarrow$

Para que sea continua en $x = -1$, ha de ser $a - 3 = 2 - b$.

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2 + bx + 1\right) = b + 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax) = a \\ f(1) = a \end{cases}$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $a = b + 2$.

Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será continua si: $\begin{cases} a - 3 = 2 - b \\ a = b + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de tenerse que: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(3x+1)}{(x-2)^2(4x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{4x+2} = \frac{7}{10}$$

$f(2) = k$

• Por tanto, ha de ser: $k = \dfrac{7}{10}$

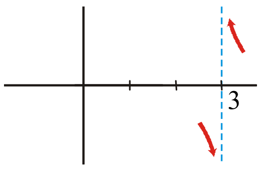
ASÍNTOTAS

<u>EJERCICIO 16</u> : Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

Solución: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

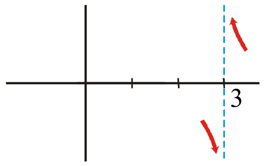


<u>EJERCICIO 17</u> : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-9} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x^2-9} = +\infty$

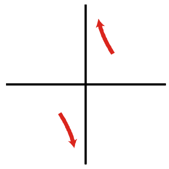


EJERCICIO 18 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2+2x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x(x+2)}$

Calculamos los límites laterales:

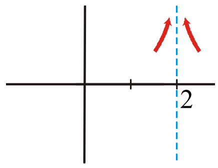
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$



EJERCICIO 19 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$

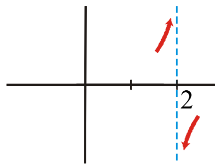


EJERCICIO 20 : Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.

Solución: $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = -\infty$



EJERCICIO 21 : Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

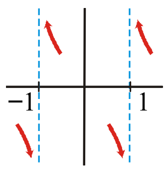
Solución:

a) • $x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x=-1\;;\; x=1. \Rightarrow$ Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$.

Posición de la curva respecto a ellas:

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$

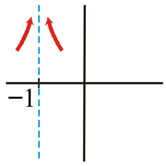


b) • $x^2+2x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \Rightarrow$ Solo tiene una asíntota vertical: $x=-1$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$

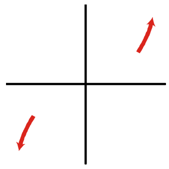


EJERCICIO 22 : Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos:

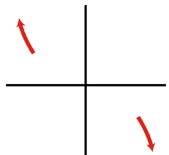
a) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x$ **b)** $f(x)=(3-x)^3$ **c)** $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x^3+x}{1-x}$

Solución:

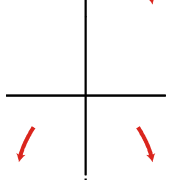
a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=-\infty$$



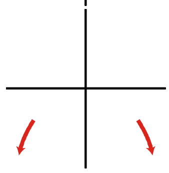
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)^3=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)^3=+\infty$



c)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$



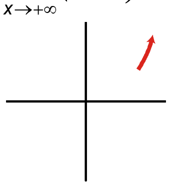
d)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$



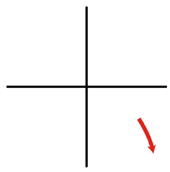
EJERCICIO 23 : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to+\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas: a) $f(x)=(x+2)^4$ **b)** $f(x)=x-x^2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)^4=+\infty$



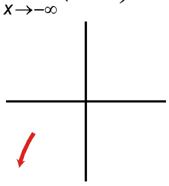
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)=-\infty$



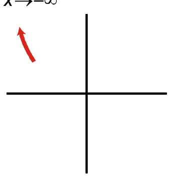
EJERCICIO 24 : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to-\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas: a) $f(x)=(x-1)^3$ **b)** $f(x)=x^2-x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)^3=-\infty$



b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)=+\infty$

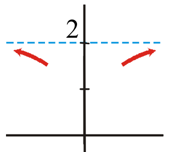


EJERCICIO 25 : Calcular las asíntotas horizontales de estas funciones y representa los resultados que obtengas:

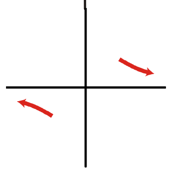
a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+2}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+1} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.V.} y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 2 \\ f(-100) < 2 \end{cases}$



b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x^2+2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2x^2+2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.V.} y = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 0 \\ f(-100) < 0 \end{cases}$



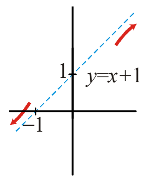
EJERCICIO 26 : Las siguientes funciones tienen una asíntota oblicua. Hállala y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$

Solución: y = mx + n

a) $\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x}{x^2+x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2+2x}{x+1} - 1.x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array}\right\} y = x+1 \Rightarrow$

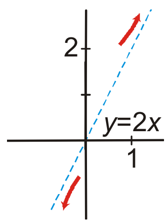
$$\text{Asíntota oblicua: } y = x+1 \begin{cases} f(100) < \text{A sin t}(100) \\ f(-100) > \text{A sin t}(-100) \end{cases}$$



b) $\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^3-x} = 2 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{2x^3}{x^2-1} - 2.x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{\infty}{\infty} = 0 \end{array}\right\} y = 2x \Rightarrow$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

$$\begin{cases} f(100) > \text{A sin t}(100) \\ f(-100) < \text{A sin t}(-100) \end{cases}$$



EJERCICIO 27 : **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:**

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2}$

Solución:

a)

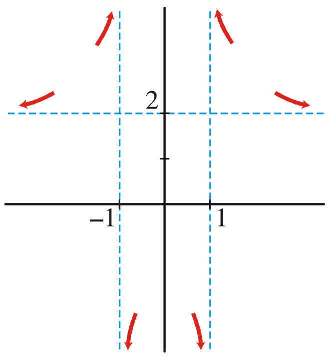
- Asíntotas verticales: Puntos que anulan el denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$x = -1 \quad \lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=+\infty;\quad \lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=-\infty$$

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=-\infty;\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

- Asíntota horizontal: $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=2 \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100)>2 \\ f(-100)>2 \end{cases}$

- Representación:



b)

- Asíntota vertical: Puntos que anulan el denominador $\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-3}{x}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-3}{x}=+\infty\end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x}{x^2}=1 \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-3x}{x^2}=1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100)<1 \\ f(-100)>1 \end{cases}$

- Representación: