VECTORES EN EL ESPACIO

Vectores linealmente independientes

Tres vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ son **linealmente independientes** si se cumple:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Ejemplo:</u>
Indica si los vectores $\vec{u}(2,3,1)$, $\vec{v}(1,0,1)$ y $\vec{w}(0,3,-1)$ son linealmente dependientes o independientes.
<u>Solución</u>
$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

<u>Ejemplo:</u>
Determina los valores de k para que los vectores $\vec{u}(3, k, -6)$, $\vec{v}(-2,1, k+3)$ y $\vec{w}(1, k+2,4)$ sean linealmente dependientes.
<u>Solución</u>
Los tres vectores serán linealmente dependientes cuando se cumpla que:

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$12 + k^2 + 3k + 12k + 24 - (-6 - 8k + 3k^2 + 15k + 18) = 0$$
$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

que se cumple para k = 2 y k = 6.

APLICACIÓN:

¿CÓMO SABER SI CUATRO PUNTOS ESTÁN EN EL MISMO PLANO?

Cuatro puntos A, B, C y D están en el mismo plano si los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes.

<u>Ejemplo:</u>
Sean los puntos A(1, 2, 1), B(2, 3, 1), C(0, 5,3) y D(-1, 4,3). Averigua si los cuatro puntos están en el mismo plano.
<u>Solución:</u>
Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, 1-1) = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 5-2, 3-1) = (-1,3,2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-1-1, 4-2, 3-1) = (-2,2,2)$$

y vemos si son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 4 - (0 - 2 + 4) = 2 - 2 = 0$$

Por lo que los vectores son linealmente dependientes y por ello podemos decir que los cuatro puntos están en el mismo plano.

Producto escalar de vectores

El **producto escalar** de dos vectores es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3$$

Ejemplo:
Dados los vectores $\vec{u}(3,-1,5)$ y $\vec{v}(4,7,11)$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$
Solución

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3,-1,5)\cdot(4,7,11) = 3\cdot 4 + (-1)\cdot 7 + 5\cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$$

Vectores ortogonales (perpendiculares)

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
Cuando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales se denota: u $\perp$ $\vec{v}$

Ejemplo:
Comprueba si los vectores $\vec{a}(2,-1,0)$ y $\vec{b}(1,-2,-1)$ son ortogonales.
Solución

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2,-1,0)\cdot(1,-2,-1) = 4 \neq 0 \rightarrow \text{No son ortogonales.}$$

Ejemplo:
Dados los vectores $\vec{a}(2,-1,4)$ y $\vec{b}(0,3,\lambda)$, $\lambda\epsilon\mathbb{R}$, halla los valores de λ para los que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.
Solución
Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2,-1,4)\cdot(0,3,\lambda) = -3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

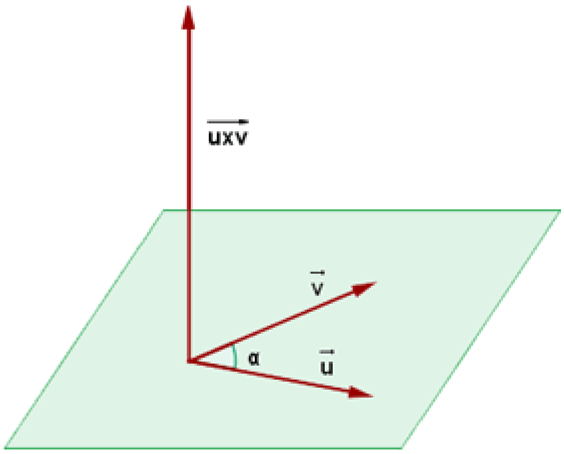
Producto vectorial de dos vectores

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v. Su **módulo** es igual a:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \operatorname{sen} \alpha$$

El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$



Ejemplo:
Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u}$= (1, 2, 3) y $\vec{v}$= (−1, 1, 2).

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + \overrightarrow{3k}$$

Ejemplo:
Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, hallar el producto vectorial de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \qquad (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6+2+4 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \qquad (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2-2+4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u} x \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.