TEMA 12 – CÁLCULO DE PRIMITIVAS

12.1 - PRIMITIVA E INTEGRACIÓN INDEFINIDA

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN f(x): F(x) es una primitiva de f(x) si F'(x) = f(x)

Ejemplos:	función: f(x)	Primitiva: F(x)
	$2x$	x^2
	sen x	- cos x
	e^x	e^x
	1/x	Ln |x|

Nota: Una función tiene infinitas primitivas

Ejemplo:	función: f(x)	Primitiva: F(x)
	$2x$	x^2
	$2x$	$x^2 + 1$
	$2x$	$x^2 – 7$
	.....	.....
	$2x$	$x^2 + C$

INTEGRAL INDEFINIDA DE f(x)

Llamamos integral indefinida o simplemente integral de f(x) al conjunto de todas sus primitivas y se denota:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{t.q. } F'(x) = f(x)$$

Ejemplos:

[1] $\int 2x\, dx = x^2 + C$

[2] $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C$

[3] $\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}\,|x| + C$

OPERACIONES CON INTEGRALES (Se cumplen las mismas que en derivadas)

[1] $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

[2] $\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

[3] $\int (f.g)(x)dx \neq \left[\int f(x)dx\right].\left[\int g(x)dx\right]$

[4] $\int \left(\frac{f}{g}\right)(x)dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

FUNCIÓN	INTEGRAL	FUNCIÓN	INTEGRAL
$\int k\,dx$	$kx + C$		
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int f'(x).f^n(x)\,dx$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$	$\sqrt{x}+C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\sqrt{f(x)}+C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx$	$\sqrt[n]{x}+C$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}dx$	$\sqrt[n]{f(x)}+C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{Lna}+C$	$\int f'(x).a^{f(x)}dx$	$\frac{a^{f(x)}}{Lna}+C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int f'(x).e^{f(x)}dx$	$e^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	Ln $\lvert x\rvert$ + C	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	Ln $\lvert f(x)\rvert$ + C
$\int$ sen x dx	- cos x + C	$\int f'(x)$.sen f(x) dx	- cos f(x) + C
$\int$ cos x dx	sen x + C	$\int f'(x)$.cos f(x) dx	sen f(x) + C
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left[1+tag^2 x\right]dx$	tag x + C	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \int f'(x).\left[1+tag^2 f(x)\right]dx$	tag f(x) + C
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	arcsen x + C	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx$	arcsen f(x) + C
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	arctag x + C	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$	arctag f(x) + C

Ejemplos:

[1] $\int 2\,dx = 2x + C$

[2] $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+C$

[3] $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$

[4] $\int 2x^5\,dx = 2.\frac{x^6}{6}+C=\frac{x^6}{3}+C$

[5] $\int \sqrt[3]{2x^2}\,dx = \sqrt[3]{2}\,\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\sqrt[3]{2}\,\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x^5}+C=\frac{3x.\sqrt[3]{2x^2}}{5}+C$

[6] $\int \frac{4}{x^3}\,dx = 4\int x^{-3}dx = 4.\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{2}{x^2}+C$

[7] $\int 3x^3 - \text{senx} + 2^x \, dx = 3\frac{x^4}{4} + \cos x + \frac{2^x}{\text{Ln}2} + C$

[8] $\int 3\cos x - 5.e^x \, dx =$ -3senx –5e^x + C

[9] $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsenx} + C$

[10] $\int \frac{3}{x^2+1} dx =$ 3.arctag x + C

[11] $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\text{Ln}\left|x^2+1\right| + C$

[12] $\int (2x-5).\cos\left(x^2-5x+3\right)dx =$ sen(x^2 – 5x + 3) + C

[13] $\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int 3.e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

[14] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} dx = \frac{1}{2}\text{arcsenx}^2 + C$

[15] $\int \text{tagx}\, dx = \int \frac{\text{senx}}{\cos x} dx = -\text{Ln}\,|\cos x| + C$

[16] $\int \frac{3x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2}\text{Ln}\,|x^2+2| + C$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

[1] Inmediatas o método de sustitución (Cuando las dos funciones tienen relación, función y derivada) Cambio f(x) = t siendo f(x) la función.

Ejemplo: $\int \text{sen}^4 x.\cos x dx =$

[t = sen x $\Rightarrow$ dt = cos x dx]

$= \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C$

[2] Integración por partes: Cuando las dos funciones no tienen relación.

D(u.v) = du.v + u dv $\Rightarrow$ udv = d(u.v) – vdu $\Rightarrow$ $\int udv = \int d(u.v) - \int vdu \Rightarrow$

$\int udv = u.v - \int v.du$

Tenemos Necesitamos

u -------Derivamos -----------du

dv -----Integramos ----------- v = $\int dv$

¿Cuál tomamos como u?

a) arcos o logaritmos
b) Polinomios
c) Trigonométrica o exponenciales

Ejemplos:

[1] $\int x.e^x dx$

$$\begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix}$$

$x.e^x$ - $\int e^x dx = x.e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

[2] $\int Lnxdx$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = \int dv = \int dx = x \end{bmatrix}$$

$\ln x.x - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x - \int dx = x.\ln x - x + C = x.(\ln x - 1) + C$

[3] $\int e^x.senxdx$

$$\begin{bmatrix} u = senx & \Rightarrow du = cosxdx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix}$$

$senx.e^x - \int e^x.\cos xdx$

- $\int e^x.\cos xdx$

  $$\begin{bmatrix} u = \cos x & \Rightarrow du = -senxdx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix}$$

  $=\cos x.e^x + \int e^x senxdx$

$$\int e^x senxdx = senx.e^x - \cos x.e^x - \int e^x senxdx \quad \Rightarrow 2\int e^x senxdx = e^x(senx - \cos x) \quad \Rightarrow$$

$$\int e^x senxdx = \frac{e^x(senx - \cos x)}{2} + C$$

INTEGRALES CON RAÍCES

Transformar en sumas

Potencias

Raíces y arcos $\quad \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = arcsenf(x) + C$

Sustitución: Lo de dentro de la raíz = $t^{\text{mcm de los índices de las raices.}}$

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx \Rightarrow bx = asent$

[1]

$$\int \frac{2+3x^2}{\sqrt{x}}dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 3\int x^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$2.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 4\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + C = 4\sqrt{x} + \frac{6x^2}{5}\sqrt{x} + C$$

[2] $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}dx = 3\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}dx = 3\sqrt{x^2+2} + C$

[3] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}x^2 + C$

[4] $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

[$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$]

$$\int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2\text{arctag } t + C = 2.\text{arctag }\sqrt{x} + C$$

[5] $\int \sqrt{4-x^2}dx$

[$x = 2\text{sen}t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$]

$$\int \sqrt{4-4\text{sen}^2 t}.2\cos tdt = \int \sqrt{4(1-\text{sen}^2 t)}2\cos t.dt = 4\int \cos^2 tdt \quad \text{(Integral trigonométrica)}$$

[6] $\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

Modo 1: Ver que es un arcoseno. Dividir numerador y denominador por 3:

$$\int \frac{2/3}{\sqrt{9-x^2}/3}dx = \int \frac{2/3}{\sqrt{(9-x^2)/9}}dx = \int \frac{2/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}}dx = 2\int \frac{1/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}}dx = 2\text{arcsen}x/3 + C$$

Modo 2:

[$x = 3\text{sen}t \Rightarrow dx = 3\cos t dt$]

$$\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{9-(3\text{sen}t)^2}}3\cos tdt = \int \frac{6\cos t}{\sqrt{9(1-\text{sen}^2 t)}}dt = \int \frac{6\cos t}{\sqrt{9\cos^2 t}}dt = \int \frac{6\cos t}{3\cos t}dt = \int 2dt = 2t + C$$

[$x = 3\text{sen}t \Rightarrow \text{sen}t = x/3 \Rightarrow t = \text{arcsen } x/3$]

Sol: $2\text{arcsen } x/3 + C$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

$\int sen^n x.cos^m x.dx$

m impar $\Rightarrow$ Cambio sen x = t

n impar $\Rightarrow$ Cambio cos x = t

m y n pares $\Rightarrow$ Cambio tag x = t

[$1 + tag^2 x = \frac{1}{cos^2 x} \Rightarrow cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$sen^2 x = 1 - cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

$(1 + tag^2 x)\, dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$]

Nota: Casos particulares: $\int sen^2 xdx$ ó $\int cos^2 xdx$
Recordar las fórmulas trigonométricas

$sen^2 x = \frac{1-cos 2x}{2}$ $\qquad$ $cos^2 x = \frac{1+cos 2x}{2}$

[1]

$$\int sen^2 xdx = \int \frac{1-cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{1}{2}cos 2xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int 2cos 2xdx =$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen 2x + C$$

[2] $\int cos^4 x.sen^3 xdx =$

[$cos x = t \Rightarrow -sen x\, dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-senx}$]

$$\int cos^4 x.sen^3 xdx = \int cos^4 x.sen^3 x.\frac{dt}{-senx} = -\int t^4.sen^2 x.dx = -\int t^4(1-cos^2 x)dx =$$
$$-\int t^4(1-t^2)dt = \int -t^4 + t^6 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{cos^5 x}{5} + \frac{cos^7 x}{7} + C$$

[3] $\int cos^5 xdx =$

[$senx = t \Rightarrow cos x..dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{cos x}$]

$$\int cos^5 xdx = \int cos^5 x.\frac{dt}{cos x} = \int cos^4 xdx = \int (cos^2 x)^2 dx = \int (1-sen^2 x)^2 dx = \int (1-t^2)^2 dt =$$
$$\int (1 \quad 2t^2 + t^4)dt = t \quad 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = senx \quad \frac{2.sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + C$$

[4] $\int sen^2 x.cos^2 xdx$

[$tag x = t \Rightarrow cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$]

$$\int \frac{t^2}{1+t^2}.\frac{1}{1+t^2}.\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt \quad \text{(Integral racional)}$$

INTEGRALES RACIONALES $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Caso I: Grado de P(x) ≥ Grado Q(x) ⇒ Hacer la división ⇒ $\int C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}dx$

Y grado de R(x) < grado Q(x)

Caso II: Grado de P(x) < Grado Q(x) ⇒ Factorizar el denominador: Q(x)

<u>Caso II.1</u> : *Todas las raíces de Q(x) son reales y simples*: Q(x) = (x-a).(x-b).(x-c)

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)dx$$

Los números A, B y C se hallan reduciendo a común denominador e igualando los numeradores.
Modo 1: Igualando los coeficientes del mismo grado.
Modo 2: Dando valores a la “x” (a,b,c) y resolviendo el sistema.

Solución: Logaritmos

<u>Caso II.2</u> : *Todas las raíces de Q(x) son reales, pero alguna no simple*: $Q(x)=(x-a).(x-b)^3$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{(x-b)^3}\right)dx$$

Los números A, B y C se hallan reduciendo a común denominador e igualando los numeradores.
Modo 1: Igualando los coeficientes del mismo grado.
Modo 2: Dando valores a la “x” (a,b,cualquier otro) y resolviendo el sistema.

Solución: Logaritmos y Potencias

<u>Caso II.3</u> : *Alguna raíz de Q(x) no real*: $Q(x) = (x-a).(x^2+1)$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$ (En el numerador un polinomio de un grado menos que en el denominador)

Los números A, B y C se hallan reduciendo a común denominador e igualando los numeradores.
Modo 1: Igualando los coeficientes del mismo grado.
Modo 2: Dando valores a la “x” (a, cualquier otro) y resolviendo el sistema.

Solución: Logaritmos y arcotangentes.

Ejemplos:

[1]

$$\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}dx = \int \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x-3}dx = \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-3}dx =$$

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{8}\ln|2x-3| + C$$

[2] $\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}dx = \int 1 + \frac{4x^2-3x+13}{x^3-7x-6}\ dx = x + \int \frac{4x^2-3x+13}{x^3-7x-6}dx$

Factorizamos el denominador: $x^3 - 7x - 6 = (x+1).(x-3).(x+2)$

$$\frac{4x^2-3x+13}{x^3-7x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2} =$$

$$\frac{A(x-3).(x+2) + B(x+1).(x+2) + C(x+1).(x-3)}{x^3-7x-6}$$

$4x^2 - 3x + 13 = A(x-3).(x+2) + B(x+1).(x+2) + C(x+1).(x-3)$

Modo 1: igualando coeficientes

$4x^2 - 3x + 13 = A(x^2 - x - 6) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x^2 - 2x - 3)$

$4 = A + B + C$
$-3 = -A + 3B - 2C \quad \Rightarrow$ Resolviendo el sistema (Gauss) $\Rightarrow A = \quad ; B = \quad ; C =$
$13 = -6A + 2B - 3C$

Modo 2: dado valores a "x"
$4x^2 - 3x + 13 = A(x-3).(x+2) + B(x+1).(x+2) + C(x+1).(x-3)$

$x = 3 \quad \Rightarrow 36 - 9 + 13 = B.4.5 \Rightarrow B = 40/20 = 2$
$x = -2 \quad \Rightarrow 16 + 6 + 13 = C.(-1).(-5) \Rightarrow C = 35/5 = 7$
$x = -1 \quad \Rightarrow 4 + 3 + 13 = A(-4).1 \Rightarrow A = 20/-4 = -5$

$$x + \int \frac{4x^2-3x+13}{x^3-7x-6}dx = x +$$

$$\int \frac{-5}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{7}{x+2}dx = x - 5Ln|x+1| + 2.Ln|x-3| + 7.Ln|x+2| + C$$

[3] $\int \frac{6x^5-7x^4-5x^3+x^2-5x+2}{x^6-2x^5+2x^3-x^2}dx$

$Q(x) = x^2.(x-1)^3.(x+1)$

$= \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}+\frac{F}{x+1}dx$

Operando obtenemos : A = 1, B = -2, C = 5, D = 2, E = -4, F = 0

$$\int \frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}dx =$$

$$\int \frac{1}{x}dx-2\int x^{-2}dx+5\int \frac{1}{x-1}dx+2\int (x-1)^{-2}dx-4\int (x-1)^{-3}dx =$$

$$= \text{Ln } |x| - 2\ \frac{x^{-1}}{-1}+5\ln|x-1|+2.\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-4\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+C =$$

$$= \text{Ln}|x|\ +\frac{2}{x}+5.\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+C$$

[4] $\int \frac{2x+3}{x^2+1}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx+\int \frac{3}{x^2+1}dx = \text{Ln}\,|x^2+1|+3\text{arctag}x+C$

[5] $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \text{Ln}|x^2+x+1| +$

$$2.\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \text{Ln}\,|x^2+x+1|+2.\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}}dx = \text{Ln}|x^2+x+1| +$$

$$\frac{8}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \text{Ln}\,|x^2+x+1|+\frac{8}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$\text{Ln}|x^2+x+1| + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{arctag}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

[6] $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}(3x-1)}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2/3}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1-2/3}{x^2+x+1}dx =$

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{2}.\frac{5}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2+x+1\right|-\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2+x+1\right|-\frac{5}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctag}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C = \frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2+x+1\right|-\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{arctag}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$