INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN

[1] Inmediatas o método de sustitución (Cuando las dos funciones tienen relación, función y derivada) Cambio f(x) = t siendo f(x) la función.

Ejemplo: $\int \text{sen}^4 x . \cos x dx =$

$[\ t = \text{sen } x \Rightarrow dt = \cos x\ dx]$

$= \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C$

Calcula estas integrales mediante un cambio de variable.

a) $\int x^2(7 + 2x^3)\, dx$

b) $\int \frac{\log^5 x}{x}\, dx$

a) $\int x^2(7+2x^3)\,dx \underset{\substack{t=7+2x^3 \\ dt=6x^2\,dx}}{=} \frac{1}{6}\int t\,dt = \frac{t^2}{12} + k = \frac{(7+2x^3)^2}{12} + k$

b) $\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx \underset{\substack{t=\log x \\ dt=\frac{1}{\ln 10 \cdot x}dx}}{=} \ln 10 \int t^5\,dt = \ln 10 \cdot \frac{t^6}{6} + k = \ln 10 \cdot \frac{\log^6 x}{6} + k$

- $\int x.\sqrt{x-1} \cdot dx$

  Hacemos la sustitución $x - 1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = t^2 + 1$
  Calculamos la diferencial de x: $dx = 2t.dt$ y sustituimos en la integral que deseamos calcular. Tendremos:

  $$\int x.\sqrt{x-1} \cdot dx = \int (t^2+1).\sqrt{t^2} \cdot 2tdt = 2\int (t^2+1).t^2.dt = 2\int (t^4+t^2).dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + K =$$

  $$= \frac{2}{5} \cdot t^5 + \frac{2}{3} \cdot t^3 + K = \frac{2}{5} \cdot (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}} + K$$

- Calcula $I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

  Hacemos el cambio $5x-2=t \Rightarrow x=\frac{1}{5}\cdot(t+2)$

  Calculamos la diferencial de x: $dx=\frac{1}{5}\cdot dt$ y sustituimos

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{5}.dt=\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{2}}.dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+K=\frac{2}{5}\sqrt{t}+K=$$

$$=\{deshaciendo\ \ el\ \ cambio\}=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+K$$

  Se podría resolver la integral directamente, sin necesidad de utilizar el método de sustitución, empleando la fórmula de integración de funciones potenciales en su forma compuesta:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\int \frac{1}{(5x-2)^{1/2}}\cdot dx=\int \underbrace{(5x-2)}_{f}{}^{-\frac{1}{2}}.dx=\int \frac{1}{5}\cdot 5\cdot(5x-2)^{-\frac{1}{2}}.dx=$$

$$=\frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{f'}.\underbrace{(5x-2)}_{f}{}^{-\frac{1}{2}}.dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+K=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+K$$

Calcula $I=\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\cdot dx$

Hacemos la sustitución $x-1=t^2 \Rightarrow x=t^2+1$
Calculamos la diferencial de x: $dx=2t.dt$ y sustituimos en la integral que deseamos calcular. Tendremos:

$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\cdot dx=\int \frac{1}{(t^2+1).\sqrt{t^2}}\cdot 2t.dt=\int \frac{1}{(t^2+1).t}\cdot 2t.dt=2\int \frac{1}{(t^2+1)}\cdot dt=2\operatorname{arctg} t+K=$$

$$=\{deshaciendo\ el\ cambio\ de\ \text{variable}\}=2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+K$$