Capítulo 5

TEST DE HIPÓTESIS

5.1. Introducción

En este tema trataremos el importante aspecto de la toma de decisiones, referida a decidir si un valor obtenido a partir de la muestra es probable que pertenezca a la población.

En general, la media (o proporción) en una muestra suele ser distinta a la media de la población, de la cuál se extrae la muestra. Lo normal suele ser que tal diferencia entre la media muestral y poblacional sea pequeña y debida al azar, pero podría suceder que dicha diferencia no esté justificada por el azar y se deba a un cambio en la población, y debamos modificar los datos que conocemos previamente.

Ejemplos:

a) Hace algunos años, la media de estatura de los españoles adultos varones era de 170 cm y su desviación típica 9 cm. Pasado el tiempo, un muestreo realizado a 36 adultos da una medida de 172 cm. ¿Puede afirmarse que esa diferencia de 2 cm es debida al azar o realmente la estatura media ha aumentado?.

b) Supongamos que, respecto a una determinada ley, el 52 % de los ciudadanos está en contra. Pasado el tiempo, una encuesta realizada a 400 personas indica que los ciudadanos en contra han descendido hasta el 49 %.¿Ha cambiado realmente la opinión pública o tal resultado es debido al azar?.

c) El porcentaje de aprobados en las PAU en un determinado distritouniversitario ha sido del 82 %. En una ciudad de ese distrito, el porcentaje de aprobados fue del 86 %. ¿Puede afirmarse con un nivel de confianza del 90 % que los resultados en esa ciudad son superiores a la media?.

Los métodos de decisión estadística están ligados a los de estimación de parámetros mediante los intervalos de confianza, aunque también aparecerán otros nuevos conceptos.

5.2. Hipótesis estadísticas

Trataremos de utilizar los datos obtenidos en una muestra para tomar decisiones sobre la población. Para ello, debemos realizar ciertos supuestos o conjeturas sobre las poblaciones. Estos supuestos, que pueden ser o no ciertos,se llaman hipótesis estadísticas.

Podemos, entonces, definir el *test de hipótesis o contraste de hipótesis* como el procedimiento estadístico mediante el cuál se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una población o poblaciones.

Dichas hipótesis se formularán sobre la media poblacional μ o la proporción poblacional p.

Llamaremos *hipótesis nula*, y se representa por H_0, a la hipótesis que se formula y por tanto se quiere contrastar o rechazar, e *hipótesis alternativa*, y se representa por H_1, a cualquier otra hipótesis que sea diferente de la formulada, y que sea contraria a H_0, de forma que la aceptación de la hipótesis nula H_0 implica el rechazo de la alternativa H_1 y viceversa, el rechazo de H_0 implica la aceptación de H_1.

En un problema de contraste de hipótesis, pues, siempre tiene que formularse una hipótesis nula H_0, y ha de ir acompañada de una alternativa, H_0 que es la que aspira a desplazar a la nula.

Ejemplo: Un investigador afirma que la temperatura del cuerpo humano en un adulto sano se distribuye según una normal de media $\mu = 37^{\text{o}}$ C y desviación típica $\sigma = 0'9^{\text{o}}$ C. Formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa

A la vista de los datos, el investigador afirma que la temperatura media del cuerpo humano es 37º, es decir la hipótesis o conjetura que formula es:

$$H_0 = 37 \quad \text{(hipótesis nula)}$$

Como hipótesis alternativa, hemos de tomar aquella contraria a esta, que la media sea distinta de 37º C, es decir:

$$H_1 \neq 37 \quad \text{(hipótesis alternativa)}$$

Si la hipótesis nula fuese del tipo $\mu \geq k$ la hipótesis alternativas sería:$\mu < k$.

5.3. Errores

Hay ocasiones en que la hipótesis nula, H_0, es cierta, pero a la vista de la muestra tengamos que rechazarla. En tal caso, estamos cometiendo un error.

El error que consiste en rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, se denomina *error de tipo I.*

Otro tipo de error puede ocurrir cuando, siendo H_0 falsa, las evidencias de la muestra, sin embargo, nos lleven a aceptarla.

Este error, cometido al aceptar cuando ésta es falsa, se denomina *error de tipo II.* Resumiendo:

		Situación	
		H_0 verdadera	H_1 verdadera (H_0 falsa)
Decisión	Mantener H_0	*Decisión correcta* Probabilidad$=1-\alpha$	*Decisión incorrecta:* ERROR DE TIPO II Probabilidad$=\beta$
	Rechazar H_0	*Decisión incorrecta:* ERROR DE TIPO I Probabilidad$=\alpha$	*Decisión correcta* Probabilidad$=1-\beta$

donde α es el nivel de significación y $1-\alpha$ es el nivel de confianza.

Con esta notación y utilizando probabilidades condicionadas:

$$\alpha = p\,(\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{es cierta}) = p(\text{Error de tipo I})$$

y

$$\alpha = p\,(\text{Aceptar } H_0/H_0 \text{es cierta})$$

Por otra parte:

$$\beta = p\,(\text{Aceptar } H_0/H_0 \text{es falsa}) = p(\text{Error de tipo II})$$

y

$$1-\beta = p\,(\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{es falsa})$$

A la probabilidad $1-\beta$ se le denomina *potencia del contraste.*

5.4. Región crítica y región de aceptación

Sabemos ya formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Lo que necesitamos ahora es un criterio para saber si debemos aceptar una u otra, es decir, ¿con cuál de las dos hipótesis nos quedamos?.

Al tener ya formulada la hipótesis nula, es necesario que las evidencias sean muy fuertes para rechazarla; es decir, puede que haya cambios debidos al azar, en cuyo caso el cambio no es significativo, y no cambiamos , pero puede que los cambios sean debidos a otras causas. En este último caso es cuando el cambio es significativo y rechazaremos.

Por lo tanto, lo primero que debemos hacer es fijar un cierto intervalo dentro del cuál es normal que haya cambios, es decir, una región tal que si el parámetro se mantiene en dicho intervalo, nos seguimos quedando con H_0, pues esas pequeñas variaciones son debidas al azar. Ese intervalo o región se denomina *región de aceptación*, y será mayor o menor dependiendo del nivel de confianza que precisemos, $1-\alpha$.

La región que quede fuera de la región de aceptación indica que en este caso los cambios no se pueden atribuir al azar, y por tanto hemos de rechazar H_0 y aceptar H_1. Tal región se llama *región crítica o de rechazo.*

Llegados a este punto, hemos de distinguir entre dos tipos de contraste o test, que determinan la región de aceptación y la región de rechazo.

1. **Contraste bilateral (o de dos colas):** En este caso la región de rechazo o región crítica está formada por dos conjuntos de puntos disjuntos. Dicho caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0 : \mu = k$ (o bien $H_0 : p = k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1 : \mu \neq k$ (o bien $H_1 : p \neq k$).

   La región crítica para un cierto nivel α sería, en la N(0;1):

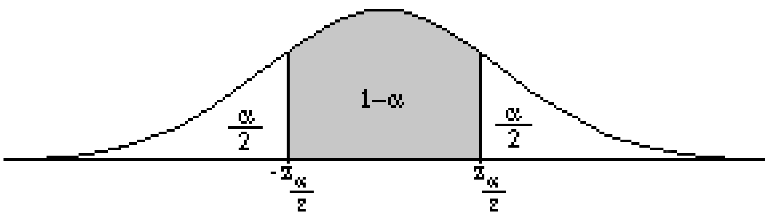

Figura 5.1: El intervalo $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por dos partes o colas.

   Fijémonos en que el nivel de significación α se concentra en dos partes (o colas) simétricas respecto de la media.

   La región de aceptación en este caso no es más que el correspondiente intervalo de probabilidad para $\overline{x}$ o $\hat{p}$, es decir:

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

   o bien:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

   Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(-\infty, \mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

   o bien

$$\left(-\infty, p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \cup \left(p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty\right)$$

2. **Contraste unilateral (o de una cola):** En este caso la región crítica está formada por un sólo conjunto de puntos.

   Como se observa en las figuras, el nivel de significación α se concentra sólo en una parte o cola.

   Este caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0 : \mu \geq k$ (o bien $H_0 : p \geq k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1 : \mu < k$ (o bien $H_1 : p < k$).(También si aparece $\leq$)

   A nivel de confianza $1 - \alpha$, las regiones serían, en la N(0;1):

   a) Unilateral por la derecha:

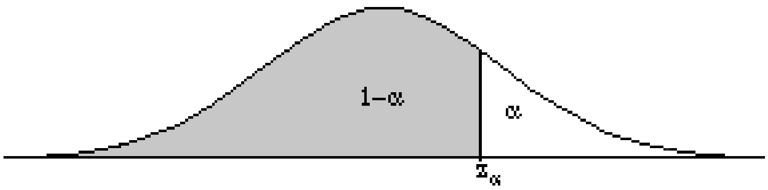

Figura 5.2: El intervalo $(-\infty, z_\alpha)$ es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por una partes o cola. El nivel α se concentra ahí.

La región de aceptación en este caso será:

$$\left(-\infty, \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

o bien:

$$\left(-\infty, p + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(\mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

o bien

$$\left(p + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty\right)$$

b) Unilateral por la izquierda:

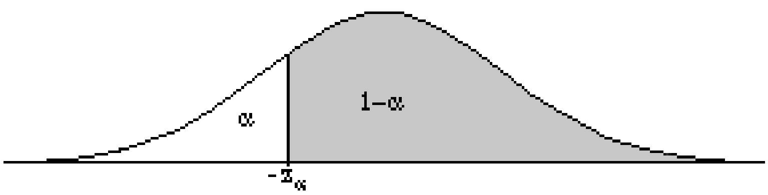

Figura 5.3: El intervalo (z_α, ∞) es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por una partes o cola. El nivel α se concentra ahí.

La región de aceptación en este caso será:

$$\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

o bien

$$\left(p - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty\right)$$

Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(-\infty, \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

o bien:

$$\left(-\infty, p - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

En todos los casos, conociendo el nivel de confianza $1 - \alpha$, tendremos que determinar el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_α (para contrastes unilaterales), que separa las regiones de rechazo y aceptación.

Algunos de estos valores más comunes se dan en la tabla adjunta, que en los bilaterales son los mismos que para intervalos de confianza o probabilidad, ya vistos con anterioridad:

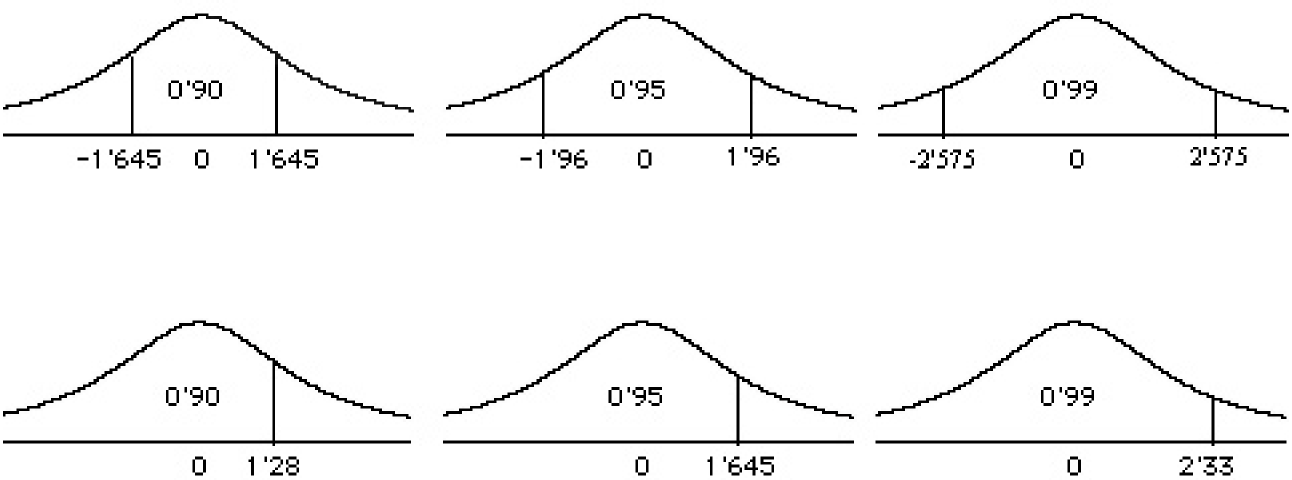

Figura 5.4: Valores más comunes para contrastes bilaterales y unilaterales derechos. Los correspondientes para los unilaterales izquierdos son negativos.

5.5. Etapas de la prueba de hipótesis

Los procedimientos seguidos en las pruebas de hipótesis correspondientes a las situaciones de decisión estadística se encuentran totalmente prefijados y se llevan a cabo en una serie de etapas que facilitan su comprensión, y que son:

1. Enunciar la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1.

   Deben ser excluyentes entre sí. Analizar, una vez enunciadas, si el contraste es bilateral o unilateral (Es bilateral si la hipótesis alternativa es del tipo $\neq$ y unilateral si es del tipo $>$ o $<$).

2. Determinar el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_α (para contrastes unilaterales), que separa las regiones de rechazo y aceptación, a partir del nivel de confianza $1 - \alpha$ o el de significación α.

3. Determinar la distribución que sigue el parámetro muestral ($\overline{x}$ o $\hat{p}$) y en base a ella y al valor obtenido en la etapa anterior, escribir las correspondientes regiones de aceptación y rechazo.

4. Calcular el estadístico usado en la prueba (en nuestro caso, calcular media muestral $\overline{x}$ o proporción muestral $\hat{p}$, a partir de la muestra).

5. Aplicar el test,es decir, dependiendo de si el estadístico cae en la región de aceptación o de rechazo, tomar la decisión de aceptar una de las dos hipótesis.

A continuación se ofrecen algunos ejemplos de problemas de test de hipótesis:

1. La vida media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una empresa es de 1570 horas, una desviación típica de 120 horas. Si es la vida media media de los tubos de dicha empresa, ¿se puede afirmar a nivel de significación 0'05 que la duración media de los tubos es de 1600 horas?.

   Determinar los errores de tipo I y II

   Etapa 1: Queremos saber si la duración media de los tubos es de 1600 horas, es decir, que nuestra hipótesis nula es $H_0 : \mu = 1600$.

   Por lo tanto, la hipótesis alternativa será que la duración no sea de 1600 horas, es decir, la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu \neq 1600$.

   Por tanto estamos ante un contraste bilateral.

   Etapa 2: A nivel de significación $\alpha = 0'05 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0'95$, y realizando el dibujo habitual (hacer como ejercicio), obtenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0'025} = 1'96$.

   Etapa 3: Determinemos la distribución de la media muestral, $\overline{x}$, teniendo en cuente que como la desviación típica de la población no la conocemos, tomamos la muestral, que es $s = 120$, y por tanto sabemos que la media muestral sigue una normal:

$$N\left(1600; \frac{120}{\sqrt{100}}\right) = N(1600; 12)$$

   Por tanto la región de aceptación será el intervalo de probabilidad:

$$\left(1600 - \frac{120}{\sqrt{100}}, 1600 + \frac{120}{\sqrt{100}}\right) = (1600 - 1'96 \cdot 12, 1600 + 1'96 \cdot 12) = (1576'48, 1623'52)$$

   De modo que, Región de Aceptación:(1576'48,1623'52)

   Región de Rechazo: $(-\infty, 1576'48) \cup (1623'52, \infty)$

   Etapa 4: En la muestra se ha obtenido que $\overline{x} = 1570$.

   Etapa 5: Para aplicar el test, simplemente hemos de comprobar si el valor de está dentro de la región de aceptación o de la de rehazo.

   Como en este caso se observa que

$$1570 \notin (1576'48, 1623'52)$$

   es decir, 1570 no está en la región de aceptación, sino en la de rechazo.

   Por tanto, hemos de rechazar que la media es 1600 (hipótesis nula) y aceptar la alternativa.

   A este nivel de confianza *no se puede afirmar que la duración media de los tubos sea de 1600 horas.*

   En cuanto a los errores:

   Error de tipo I es afirmar que la duración media no es de 1600 horas cuando en realidad sí lo es.

   Error de tipo II es afirmar que la duración media es de 1600 horas cuando en realidad no lo es.

2. Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6'5 años con una desviación típica de 4. ¿Sirve esta afirmación para aceptar, con un nivel de significación del 5 %, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justificar adecuadamente la respuesta.

   El enunciado no puede ser más claro a la hora de determinar las hipótesis nula y alternativa. Queremos comprobar si el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6, luego la hipótesis alternativa será que dicho tiempo medio de empleo sea MAYOR que 6, es decir:

$$H_0 : \mu \leq 6$$

   o simplemente $H_0 : \mu = 6$ (lo que queremos comprobar) frente a:

$$H_1 : \mu > 6$$

   Es claramente un contraste unilateral. La región de aceptación será

$$\left(-\infty, \mu + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

   puesto que aceptamos todos los valores menores que un cierto tope. Notemos que concemos el valor de s (en la muestra) y no el de σ, pero eso no inluye en la fórmula. La región de rechazo, por tanto, es:

$$\left(\mu + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

   Para calcular el nivel $z_\alpha = z_{0'05}$, y por tanto $z_{0'05} = 1'645$. Así pues, la región de aceptación es, puesto que $\mu = 6$, $s = 4$ y $n = 64$, resulta ser, aproximadamente:

$$(-\infty, 6'8225)$$

   Y la región crítica:

$$(6'8225, \infty)$$

   Como en la muestra resulta que $\overline{x} = 6'5$, que pertenece a la región de aceptación, es decir, aceptamos la hipótesis nula, la media es de 6 años, al 95 % de confianza.

3. Un investigador, utilizando información de anteriores comicios, sostiene que, en una determinada zona, el nivel de abstención en las próximas elecciones es del 40 % como mínimo. Se elige una muestra aleatoria de 200 individuos para los que se concluye que 75 estarían dispuestos a votar. Determinar, con un nivel de significación del 1 %, si se puede admitir como cierta la afirmación del investigador.

   Se trata ahora de un contraste de proporciones. La hipótesis a contrastar está muy clara: El investigador dice que el nivel de abstención es de un 40 % por lo menos, es decir, sólo rechazaremos su hipótesis cuando la proporción sea menor que este valor, es decir:

$$H_0 : p \geq 0'4$$

   o simplemente $H_0 : p = 0'4$ (lo que dice el investigador) frente a:

$$H_1 : p < 0'4$$

   (la proporción de abstención es menor)

   Así pues la región de aceptación es:

$$\left(p - z_\alpha \sqrt{\frac{pq}{n}}, \infty\right)$$

Y la de rechazo:

$$\left(-\infty, p - z_\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para calcular el nivel $z_\alpha = z_{0'01}$, y por tanto $z_{0'01} = 2'33$. Así pues, la región de aceptación es, puesto que $p = 0'4$, $q = 0'6$ y $n = 200$, resulta ser, aproximadamente:

$$(0'3192, \infty)$$

Y la región crítica:

$$(-\infty, 0'3192)$$

Como en la muestra resulta que

$$\hat{p} = \frac{125}{200} = 0'625$$

, los 125 que no votan de los 200 a los que se pregunta. Al 99 % de confianza entonces, resulta que dicho valor en la muestra pertenece a la región de aceptación, es decir,aceptamos la hipótesis nula y el investigador tiene razón, la abstención será, al menos del 40 %.