Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas (LADE)
Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales (FCJS)
Universidad Rey Juan Carlos (URJC)

PROBLEMAS

CÁLCULO INTEGRAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Matemáticas
Primer Curso

I. CALCULO DE PRIMITIVAS

1. Calcular, como inmediatas, las integrales que se indican.

1. $\int \sqrt[3]{x^4}\, dx$

2. $\int \left(1+x^2\right)^3 x\, dx$

3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}\, dx$

4. $\int \dfrac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}\, dx$

5. $\int \dfrac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$

6. $\int \dfrac{\left(1+x^2\right)}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\int \dfrac{5\ln x}{x}\, dx$

8. $\int e^{x+5}\, dx$

9. $\int \dfrac{a^x}{b^x}\, dx$

10. $\int x e^{x^2}\, dx$

11. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

12. $\int \dfrac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

13. $\int e^{3\cos 2x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

14. $\int \dfrac{e^{\operatorname{arctg}\, x}}{1+x^2}\, dx$

15. $\int \dfrac{x}{x^2-1}\, dx$

16. $\int \dfrac{x^3}{1+x^4}\, dx$

17. $\int \dfrac{1}{x\ln x}\, dx$

18. $\int \operatorname{tg}\, x\, dx$

19. $\int \operatorname{cotg} x\, dx$

20. $\int \dfrac{1}{a+bx}\, dx$

21. $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\, dx$

22. $\int \dfrac{e^{1/x^2}}{x^3}\, dx$

23. $\int \dfrac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$

24. $\int \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

25. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\, dx$

26. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, dx$

27. $\int \dfrac{1}{9+x^2}\, dx$

28. $\int \dfrac{5}{4+3x^2}\, dx$

29. $\int \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

30. $\int \dfrac{x}{1+x^4}\, dx$

31. $\int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) dx$

32. $\int \dfrac{5}{\cos^2 x}\, dx$

33. $\int 3\operatorname{sen}(4x)\, dx$

34. $\int \left(3x^2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}+e^{4x}\right) dx$

35. $\int \dfrac{x+1}{3+x^2}\, dx$

36. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}+4\operatorname{sen}(2x)-\dfrac{2}{\cos^2 x}+e^{\operatorname{sen} x}\cos x\right) dx$

2. Calcular por partes las siguientes integrales:

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$
3. $\int x^m \ln x \, dx \qquad m>1$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$
5. $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$
6. $\int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$
7. $\int \ln^2 x \, dx$
8. $\int e^{\operatorname{arcsen} x} \, dx$
9. $\int x\sqrt{1+x} \, dx$
10. $\int (x+1)^2 e^{2x} \, dx$
11. $\int x \ln(x+1) \, dx$

3. Calcular las primitivas de las funciones racionales que se indican.

1. $\int \frac{4}{5-x} \, dx$
2. $\int \frac{3}{(1+x)^2} \, dx$
3. $\int \frac{1}{1+4x^2} \, dx$
4. $\int \frac{x+1}{1+4x^2} \, dx$
5. $\int \frac{7}{x^2+x+1} \, dx$
6. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+3} \, dx$
7. $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$
8. $\int \frac{2x^3+1}{(x+2)(x-1)} \, dx$
9. $\int \frac{1}{x^2-4} \, dx$
10. $\int \frac{1}{x^3+x} \, dx$
11. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} \, dx$
12. $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \, dx$
13. $\int \frac{1}{x(x-1)(x+1)^2} \, dx$
14. $\int \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-x^2} \, dx$
15. $\int \frac{x^4}{x^4-1} \, dx$
16. $\int \frac{3x^2}{2x^2-6x+4} \, dx$
17. $\int \frac{2}{x^3-x^2} \, dx$
18. $\int \frac{x}{x^3-1} \, dx$

4. Mediante cambio de variable, calcular las primitivas siguientes.

1. $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \, dx$
2. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{3x}+1} \, dx$
3. $\int \frac{2^x}{1-4^x} \, dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{6\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} \, dx$
5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} \, dx$
6. $\int \sqrt{x}(1-x)^3 \, dx$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx$
8. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \, dx$
9. $\int \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} \, dx$
10. $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} \, dx$
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-3x^2}} \, dx$

5. Resolver las integrales que se indican.

1. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$	2. $\int \frac{x^3}{2+x^4}\, dx$	3. $\int \frac{x}{2+x^4}\, dx$
4. $\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}\, dx$	5. $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\, dx$	6. $\int \frac{x^4}{\left(x^2-1\right)^2}\, dx$
7. $\int \frac{x}{a^4+x^4}\, dx$	8. $\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$	9. $\int \frac{x^2}{(x-1)^2}\, dx$
10. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$	11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$	12. $\int \frac{x}{x^4+4}\, dx$
13. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$	14. $\int \frac{x+3}{x^2-x}\, dx$	15. $\int x \ln x\, dx$
16. $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\, dx$	17. $\int x e^{-x^2/2}\, dx$	18. $\int \frac{2x+3}{3x+2}\, dx$
19. $\int \frac{e^{2/x}}{x^2}\, dx$	20. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$	21. $\int \frac{2}{1+e^x}\, dx$
22. $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$	23. $\int \frac{e^{3+x}}{\sqrt{2+e^{2x}}}\, dx$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$
25. $\int x e^{-x^2}\, dx$	26. $\int \frac{4x}{4+x^4}\, dx$	27. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$
28. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$	29. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx$	30. $\int \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
31. $\int \frac{a^x}{a^x+1}\, dx$	32. $\int \frac{x\, \mathrm{L}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\, dx$	33. $\int \frac{3^x}{\sqrt{2-9^x}}\, dx$
34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(16+x)}$	35. $\int \frac{2^{x+1}\, \mathrm{L}\, 2}{1+4^x}\, dx$	36. $\int \frac{e^{3+x}}{\sqrt{2+e^{2x}}}\, dx$
37. $\int \frac{x}{e^x}\, dx$	38. $\int \frac{x+\ln x}{x^2 \ln x}\, dx$	39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

II. INTEGRALES DEFINIDAS PROPIAS

6. Comprobar los resultados siguientes.

1. $\int_0^1 \left(x^3+2\right)5x^2\ dx = \frac{25}{6}$ 2. $\int_0^a \frac{x}{a^4+x^4}\ dx = \frac{\pi}{8a^2} \quad a \in \Re - \{0\}$

3. $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\ dx = \sqrt{20}-\sqrt{8}$ 4. $\int_2^4 \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = 4\sqrt{2}-6$

7. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

Calcular $\int_0^3 f(x)\ dx$ e interpretar gráficamente el resultado.

8. Calcular $\int_0^4 x^2\ dx - \int_1^2 (2 - x)\ dx$ y representar gráficamente.

9. Utilizando la integral definida calcular las áreas que se indican.

a. Area comprendida entre las líneas $y = x$ y $y = \frac{x^2}{4}$

b. Area limitada por las líneas $y = x^2$ y $y = -3x^2 + 1$

c. Area limitada por las líneas $x + y - 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 1$, $y = 0$.

d. Area del polígono de vértices A(0,1); B(1,2); C(3,1); D(1,0).

10. Hallar el valor medio de las funciones siguientes :

a. $f(x) = \cos x \qquad x \in [0, 2\pi]$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en [-1,2] y en [-1,1].

11. Resolver las siguientes integrales:

1. $\int_0^1 \frac{2}{1+e^x} dx$ 2. $\int_0^{e-1} \ln(1+x)\ dx$ 3. $\int_0^1 \frac{e^{2x+1}}{e^x} dx$

4. $\int_0^4 e^{-\sqrt{x}}\ dx$ 5. $\int_1^e \ln(x)\, dx$ 6. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

7. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$ 8. $\int_4^3 \frac{3x^2}{2x^2-6x+4} dx$

III. INTEGRALES IMPROPIAS

12. Calcular las siguientes integrales eulerianas.

1. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\ dx$
2. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$
3. $\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\ dx$
4. $\int_0^\infty x^3 e^{-x/4}\ dx$
5. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\ dx$
6. $\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2}\ dx$
7. $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}+1}\ dx$
8. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$
9. $\int_0^\infty (x-2)^2 e^{-kx}\ dx$
10. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\ dx$
11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\ dx$
12. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
13. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$
14. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\ dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\ dx$
16. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\ dx$
17. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\ dx$
18. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\ dx$
19. $\int_0^1 \sqrt{2x}\sqrt{1-x}\ dx$
20. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\ dx$
21. $\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

13. Calcular las áreas que se indican.

1. Area comprendida entre la línea $y=\frac{1}{1+x^2}$ y el eje de abcisas.
2. Area comprendida entre la línea $xy=3$ y los ejes de coordenadas del primer cuadrante.
3. Area comprendida entre la línea $x^2y=3$, la recta $x=1$ y el eje de abcisas.
4. Area encerrada entre las curvas $y=-x^2$ y $y=x^3$

14. Resolver las siguientes integrales:

1. $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$
2. $\int_0^1 x\ln x\ dx$
3. $\int_0^1 x^{-1/2}(2-2x)^{1/2}\ dx$
4. $\int_0^\infty \sqrt{2t^3}e^{2-t}\ dt$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$
6. $\int_0^\infty x\ e^{-\sqrt{x}}\ dx$

IV. INTEGRALES DOBLES

15. Calcular:

1. $\iint_S (x^2+2y)\ dx\ dy$ siendo $S=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
2. $\iint_S \frac{x^2}{1+y^2}\ dx\ dy$ siendo $S=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$
3. $\iint_S xy\ dx\ dy$ siendo S el triángulo formado por los ejes de abcisas y ordenadas y la recta que los corta en los puntos (0,1) y (1,0).
4. $\iint_S y\ dx\ dy$ siendo S el triángulo formado por el eje de ordenadas, la recta $y=x$, y la recta a la que pertenecen los puntos (0,2) y (1,0).
5. $\iint_S \frac{x^2}{1+y^2}\ dx\ dy$ siendo S el cuadrado de vértices: (0,0); (0,1); (1,1) y (1,0).
6. $\iint_S (x-y)\ dx\ dy$ siendo $S=\{(x,y)|x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le x^2,\ x\le 2\}$
7. $\iint_S\ dx\ dy$ siendo S el triángulo de vértices: (0,0); (1,1) y (2,0).
8. $\iint_S \frac{x}{x^2+y^2}\ dx\ dy$ siendo S la región limitada por: $y=x$, y $y=\frac{x^2}{2}$
9. $\iint_S \sqrt{x}y^2\ dx\ dy$ siendo $S=\{(x,y)|x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+\ y\le 1\}$
10. $\iint_S x^2\ dx\ dy$ siendo $S=\{(x,y)|x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le e^{-x}\}$

16. Dibujar los recintos a los que van extendidas las integrales siguientes:

1. $\int_1^3\left(\int_{x/3}^{2x} f(x,y)\ dy\right)\ dx$
2. $\int_{-1}^0\left(\int_0^2 f(x,y)\ dy\right)\ dx$
3. $\int_0^1\left(\int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy$
4. $\int_1^2\left(\int_0^{2x} f(x,y)\ dy\right)\ dx$

17. ∄

18. Mediante la integral doble, calcular las áreas definidas por las siguientes regiones:

1. $R = \left\{ (x,y) \middle| x \le y \le 2,\ \ 0 \le x \le \dfrac{1}{y} \right\}$
2. $R = \left\{ (x,y) \middle| x^2 - 1 \le y \le 1 - x,\ \ 0 \le x \right\}$
3. $R = \left\{ (x,y) \middle| x^2 \le y \le 4 \right\}$
4. $R = \left\{ (x,y) \middle| y \le -x + 2,\ \ y \ge x^2 \right\}$
5. $R = \left\{ (x,y) \middle| x + y \le 1,\ \ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$

19. ∄

V. CALCULO INTEGRAL. EJERCICIOS DIVERSOS

20. El Tanto neto de inversión de una Empresa sigue la expresión: $I(\mathrm{t}) = \mathrm{t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{t}^2}$. Calcular la Inversión neta total en los próximos 5 años.

21. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ es seguro que lo será también en cualquier intervalo $[c,d] \subset [a,b]$.

    ¿Se podría asegurar entonces que $\int_a^b f(x)dx > \int_c^d f(x)dx$?.

22. Hallar el valor medio de las funciones siguientes :
    a. $f(x) = \cos x \qquad x \in [0, 2\pi]$
    b. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en [-1,2] y en [-1,1].

23. Una empresa estudia acometer un proyecto de inversión de duración 5 años. Los ingresos y gastos marginales en el tiempo se estima serán: $I_{mg}(t) = 2t^2 - t$ y $G_{mg}(t) = t^2 + t + 1$. Calcule el beneficio neto acumulado en el intervalo de tiempo [0,5]. Calcúlese nuevamente el beneficio neto acumulado, pero en esta ocasión considerando un factor de descuento o actualización continuo de la forma $e^{-t/10}$.

24. Sea una Empresa cuyos costes marginales responden a la función :

$$C_{mg} = \frac{3}{4}q^2 - 8q + 10$$

con unos costes fijos de 100 u.m.

a. Determinar la función de Costes Totales.
b. Importe de los costes como consecuencia de incrementar la produccion de 10 a 20 udes.

25. Calcular $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$ donde $f(x,y) = x$

    y $R = \left\{ (x,y) \middle| \frac{1}{x} \le y \le x; \quad y \le -x + 4 \right\}$

26. Al ser cierto que $\int_0^2 x^2\, dx > \int_0^2 x\, dx$. ¿Esto supone que $x^2 > x \qquad \forall x \in [0,2]$?

27. Obtener el área de la región plana delimitada por las curvas: $y = -x^2 + 4x$ y $y = 4 - x$.
    a. Mediante integración simple.
    b. Mediante integración doble.

28. Razonar si es cierta o no la siguiente igualdad
$\int (x-1)^2 \ dx + \int \left(2x - x^2 - 1\right) \ dx = 0$

29. Obtener el área del primer cuadrante de un círculo mediante:
   a. Integración simple.
   b. Integración doble en coordenadas cartesianas.
   c. Integración doble en coordenadas polares.

30. Represente las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ y calcule, mediante integración simple y mediante integración doble, el área encerrada por ellas.

31. Calcular $\iint_R f(x_1, x_2) \ dx_1 \ dx_2$ siendo $f(x_1, x_2) = 2$ y
$R = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x_1, \ 0 \le x_2, \ x_2 \le x_1^3, \ x_2 \le x_1^{1/3} \right\}$

32. Sea f una función de clase C^2 en [a,b] y tal que
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 3 + 4(x-a) \qquad \forall x \in [a,b]$$
Determinar la función f sabiendo además que $f(a) = 1$ y $f'(a) = 2$.

33. Dada la función $f(x) = \mathrm{L}\, x$
   a. Obtener la expresión de la función integral $F(t)$, en el intervalo $[1,t] \quad \forall t \ge 1$
   b. Determinar el área de la región limitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [1,e]:
      * A través de la función integral
      * Mediante integración simple
      * Mediante integración doble (considerando la región verticalmente y horizontalmente simple)
   c. Hallar el valor medio (valor medio integral) de $f(x)$ en el intervalo [1,e].

34. Calcular mediante integración el área de los recintos delimitado por:
   a. $S = \begin{cases} y \le 2 \\ y \ge -2 \\ x + y \le 3 \\ x - y \le 3 \\ x \ge 0 \end{cases}$
   b. $S = \begin{cases} y \le 2x \\ y \ge x^2 \\ x + y \le 2 \end{cases}$
   c. $S = \begin{cases} y \le x \\ y \ge x^2 \\ y \ge \dfrac{1}{2} - x \end{cases}$

35. Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, sabiendo que $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -1$ $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$ y $\int_2^1 f(x)\,dx = -3$.

36. Comprobar que $\int_0^2 \sqrt{(2-x)(2+x)}\,dx = \pi$

37. Comprobar que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

38. Calcular las siguientes integrales:

a. $\int_0^{\infty} (1-x)^3 e^{-x^2}\,dx$

b. $\int_{a+1}^{b} \frac{1}{x-1}dx$, siendo $\begin{cases} \int_1^a xe^x dx = 0 \\ \int_0^a \int_0^b 9x^2y^2 dxdy = 27 \end{cases}$

39. Calcular el area del recinto

$$R\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$$

donde a es una constante positiva que verifica : $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)dx = \frac{1}{6}$

40. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy$$

siendo el dominio de integración $D = \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ y - x \le 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

41. Sean los siguientes recintos:

$$S_1 = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2 = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

¿Es cierto que para toda función $f(x,y)$ definida en S se verifica que :

$\iint_{S_1} f(x,y)dxdy = \iint_{S_2} f(x,y)dxdy$?

En caso afirmativo razonar la respuesta y en caso negativo poner un contraejemplo.

42. Calcular $\iint_R xe^y\,dxdy$, siendo R la región del plano XY definida como sigue:

$$R=\begin{cases} y\le x^2+1 \\ y\ge 2x^2 \end{cases}$$

43. Calcular el area de la región R del plano XY:

$$R=\begin{cases} y\le 3+x \\ y\ge x^2+2x-3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

a. Mediante Integración simple.
b. Mediante Integración doble.

44. Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $f(x,y)=y\left(x+1\right)$, cuya base es la región siguiente del plano XY:

$$R=\begin{cases} x\ge 0 \\ 0\le y\le e^{-x} \end{cases}$$

45. La variación del los Ingresos y Gastos de una Empresa a lo largo del tiempo , medido este en años, viene dada por:

$$\frac{dI(t)}{dt}=24t^2, t\ge 0$$

$$\frac{dG(t)}{dt}=12t^3, t\ge 0$$

Se pide:

a. Beneficio obtenido en el tercer año
b. Función que mide el beneficio acumulado a lo largo del tiempo , si los ingresos en el momento de abrir la empresa son de 0 u.m. y los gastos de 2 u.m.
c. Interpretación del valor medio integral a los dos años de actividad.
d. Momento del tiempo en que los beneficios ya no son suficientes para compensar las pérdidas.
e. Momento del tiempo en que la Empresa acumula mayores beneficios, y su importe.

VI. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

46. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a. $2xy' = \frac{1}{y}$

b. $y' = \sqrt{y}\ln x, \quad s.a\ y(1) = 4$

c. $e^{2x}y' = \frac{e^x - 1}{y}$

d. $(3x+2)y' = (2x+3)y\ln y, \quad s.a. y(0) = e$

e. $y'ye^{\frac{y^2}{2}}x^2 = e^{\frac{2}{x}}$

47. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a. $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}, \quad s.a.\ y(0) = 0$

b. $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$

c. $y' + y = x$

d. $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}+x}, \quad s.a. y(0) = 1$

e. $y' = xy + xe^{x^2}$

48. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $e^{2y+1}\sqrt{x-1}\,y' = xe^y$, sujeta a $y(1) = 0$

b. $2xy' = 4y + \frac{6x^2}{x-1}$

c. $x(y' - x) = y$, en el punto $(x, y) = (-1,1)$

d. $y' = \frac{y}{x^2 - 1}$

e. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, sujeta a $y(-1) = 0$

f. $y'(1+e^x) = e^{2x}$

g. $y' = Lx \cdot e^x + y$, sujeta a $y(1) = 0$

h. $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$, sujeta a $y(3) = 0$

49. La población de un pais $X(t)$ varía en el tiempo (t= años) de acuerdo con la conocida curva logística, de forma que la tasa instantanea de variación es igual a :

$$k_1\ X(t) - k_2\ X^2(t)$$

Determinar:

a. Trayectoria temporal de la población $X(t)$ y su tendencia.

b. Tiempo que debe transcurrir para que la población se incremente en un 50 %

Datos:

$X(t=0) = 5$ millones, $k_1 = 0{,}1$ y $k_2 = 0{,}01$.

50. De un cierto producto las ventas acumuladas en el sector han alcanzado hasta la fecha $(t=0)$ la cantidad de 1.000 udes.

El sector está liderado por una empresa que tiene asegurada permanentemente la venta de toda su producción, entretanto no exceda las necesidades del mercado.En relación con estas , su departamento de Marketing prevé que las ventas acumuladas en el sector varien a un ritmo instantaneo dado por la expresión:

$$500\,e^{-0{,}5t}$$

El Departamento de producción es esta empresa informa que es posible aumentar la fabricación del producto a una tasa instantánea proporcional a la producción total alcanzada en la actualidad, si bien este ritmo se verá disminuido,debido a razones tecnológicas , en el 50 % de la producción total que se vaya consiguiendo.

Si la producción total alcanzada en la actualidad se eleva a 800 udes. y es 1,375 la constante de proporcionalidad mencionada, determinar:

a. Momento del tiempo en que la empresa monopolizaría el mercado de ese producto.

b. Stock de producto generado en el tercer año por la empresa.

c. Tendecia del Stock.

51. La tasa de variación de la oferta y de la demanda respecto al precio de un determinado bien son constantes e iguales a 3 y -2, respectivamente.

Se supone que el precio varia en el tiempo proporcionalmente al exceso de la demanda sobre la oferta, siendo el coeficiente de proporcionalidad: 0,1.

Suponiendo que actualmente (t=0) el precio es de 26 ptas. y la oferta y la demanda coinciden en 18 unidades, demostrar que tanto el precio como la demanda y la oferta no variarán a lo largo del tiempo.

52. Sea $P(t)$ una función temporal que determina el precio en el mercado de segunda mano de cierta maquinaria.En el momento de su adquisición $(t=0)$ en el mercado de primera mano el precio de dicha maquinaria asciende a 20 millones de ptas.

Se sabe que la tasa instantanea de variación del precio es proporcional a la diferencia entre el precio en cada momento t ,y el valor residual que es de 2 millones de ptas. , siendo la constante de proporcionalidad $k = -0{,}1$.

Suponiendo que el tiempo se mide en años , Se pide:

a. Determinar cuanto tiempo ha de transcurrir para que el precio inicial se reduzca a la mitad.

b. Representar gráficamente la trayectoria temporal del precio.

53. Una Empresa, que comercializa el producto A, recientemente ha efectuado una gran campaña publicitaria para promocionar este artículo. Sea $V(t)$ la variable, función del tiempo, que expresa el ritmo de ventas.

Antes de la campaña el ritmo de ventas era V_a =10.000 uds/dia.

Al final de la campaña $(t=0)$, $V(t)$ alcanza su valor máximo, situandose en 50.000 ptas/dia. A partir de ese momento se observa que $V(t)$ disminuye , de forma que su variación instanánea es proporcional al exceso de $V(t)$ sobre V_a , siendo $k=-0{,}01$ la constante de proporcionalidad.

a. Determinar cuantos dias han de transcurrir, desde el final de la campaña, para que el ritmo de ventas $V(t)$, sea de 30.000 uds/dia.

b. Hallar la tendencia de $V(t)$.

TABLA DE PRIMITIVAS

1. $$\int f'(x)\, f^{n}(x)\; dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

2. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\; dx = \mathrm{L}\left|f(x)\right| + C$$

3. $$\int f'(x)\, a^{f(x)}\; dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{L}\,a} + C$$

4. $$\int f'(x)\, e^{f(x)}\; dx = e^{f(x)} + C$$

5. $$\int f'(x)\;\operatorname{sen} f(x)\; dx = -\cos f(x) + C$$

6. $$\int f'(x)\;\cos f(x)\; dx = \operatorname{sen} f(x) + C$$

7. $$\int \frac{f'(x)}{\cos^{2} f(x)}\; dx = \int f'(x)\left(1+\operatorname{tg}^{2} f(x)\right)\, dx = \operatorname{tg} f(x) + C$$

8. $$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^{2} f(x)}\; dx = -\operatorname{cotg} f(x) + C$$

9. $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^{2}(x)}}\; dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$

10. $$\int \frac{f'(x)}{1+f^{2}(x)}\; dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

11. $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^{2}(x)}}\; dx = \operatorname{arcSh} f(x) + C = \mathrm{L}\left|f(x)+\sqrt{f^{2}(x)+1}\right| + C$$

12. $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^{2}(x)-1}}\; dx = \operatorname{arcCh} f(x) + C = \mathrm{L}\left|f(x)+\sqrt{f^{2}(x)-1}\right| + C$$

13. $$\int \frac{f'(x)}{1-f^{2}(x)}\; dx = \operatorname{arcTh} f(x) + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right| + C$$