DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Derivada de una función en un punto. Función derivada.

Sea f (x) una función de una variable definida en un intervalo abierto (a , b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que **f es derivable en x_0** si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{con} \quad h = x - x_0$$

Si f es derivable en x_0 este límite se llama **derivada de f en x_0** y se escribe de cualquiera de las siguientes formas:

$$f'(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad , \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$$

Ejemplos:

1. $y = f(x) = 4 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{4 - 4}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2. $y = f(x) = 3x \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3x - 3x_0}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{3(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 3 = 3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3$$

3.- $y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

La derivada mide la variación aproximada que se produce en la función ante un cambio pequeño en la variable independiente.

Una función f(x) de una variable definida en un intervalo abierto (a , b) se dice que es **derivable** si lo es en todo punto $x_0 \in (a, b)$, lo que quiere decir que $\forall\ x_0 \in (a, b)$ existe $f'(x_0)$. Se llama **función derivada** de f a la que asigna a cada $x \in (a, b)$ el valor $f'(x)$.

Sea f(x) una función de una variable definida en un intervalo abierto (a , b) y sea $x_0 \in (a , b)$. Se dice que f(x) es **derivable en x_0 por la derecha** si existe

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y f(x) es **derivable en x_0 por la izquierda** si existe

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Estos límites laterales se llaman **derivadas laterales**.

Una función f es derivable en x_0 si y sólo si existen $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ y ambos valores son iguales, en cuyo caso:

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Ejemplos:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x - 2 - 2}{x - 2} = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

1. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

<u>Observación importante</u>: **Si f(x) es derivable en el punto x_0 entonces f(x) es continua en dicho punto; de aquí se deduce que si una función f(x) no es continua en un punto x_0 entonces tampoco será derivable en dicho punto. Pero el recíproco no tiene por qué ser cierto, es decir, si una función f(x) es continua en un punto x_0 entonces podrá ser o no derivable en dicho punto.** De los ejemplos anteriores, observamos en el nº 3 que f(x) es derivable en el punto x = 0, por lo que también será continua en dicho punto. Ahora bien, en el ejemplo nº 2, la función f(x) = $|x|$ no es derivable en x = 0 aunque sí es continua en ese punto.

<u>**Derivadas de las funciones más usuales**</u> (C representa una constante y f una función derivable)

Función	derivada	Función	derivada
C	0		
x	1	C x	C
x^n	nx^{n-1}	f^n	$n f^{n-1} f'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{f}$	$\frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
e^x	e^x	e^f	$f' e^f$
a^x	$a^x \ln a$	a^f	$f' a^f \ln a$
ln x	$\frac{1}{x}$	ln f	$\frac{f'}{f}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a f$	$\frac{f'}{f \ln a}$
sen x	cos x	sen f	f′ cos f
cos x	- sen x	cos f	- f′ sen f

Función	derivada	Función	derivada
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg f	$\frac{f'}{\cos^2 f}$
cotg x	$\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$	cotg f	$\frac{-f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
sec x	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$	sec f	$\frac{f' \operatorname{sen} f}{\cos^2 f}$
cosec x	$\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$	cosec f	$\frac{-f' \cos f}{\operatorname{sen}^2 f}$
arc sen x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arc sen f	$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
arc cos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	arc cos f	$\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
arc tg x	$\frac{1}{1+x^2}$	arc tg f	$\frac{f'}{1+f^2}$
arc cotg x	$\frac{-1}{1+x^2}$	arc cotg f	$\frac{-f'}{1+f^2}$

<u>Operaciones con derivadas</u> (k y a son constantes y f , g funciones derivables)

· **suma**	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
· **producto por escalar**	$(kf)' = kf'$
· **producto**	$(fg)' = f'g + fg'$
	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
	$(fghj)' = f'ghj + fg'hj + fgh'j + fghj'$
	y así sucesivamente
· **cociente**	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
· **exponencial**	$(f^g)' = f^g g' \ln f + g f^{g-1} f'$
	En particular: $(f^n)' = n f^{n-1} f'$
	$(a^f)' = f' a^f \ln a$

Ejemplos:

1. $y = x^3 + 2x - 7 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2\cdot 1 - 0 = 3x^2 + 2$

2. $y = x^4 + \sqrt{x} - \text{sen } x + \sec x \Rightarrow y' = 4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x + \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$

3. $y = e^x - \text{Ln } x + \log_{10} x - \text{tg } x - \text{cosec } x \Rightarrow y' = e^x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x \text{ Ln}10} - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

4. $y = x^2 \text{senx} \Rightarrow y' = 2x(\text{sen } x) + x^2(\cos x)$

5. $y = 5^x \text{ Ln } x \Rightarrow y' = 5^x \text{ Ln}5 \text{ Ln}x + 5^x \frac{1}{x}$

6. $y = x^{10} \cdot \text{arcsen } x \cdot \sec x \Rightarrow$

$$y' = 10x^9 \cdot \text{arcsen } x \cdot \sec x + x^{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sec x + x^{10} \cdot \text{arcsen } x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$$

7. $y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

8. $y = (1 + 7x^3)^6 \Rightarrow y' = 6(1 + 7x^3)^5 \cdot 21x^2 = 126x^2(1 + 7x^3)^5$

9. $y = \ln(x^2-1) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

10. $y = \text{sen}(3x^2-5x+9) \Rightarrow y' = (6x-5)\cdot\cos(3x^2-5x+9)$

11. $y = 4^{\ln x} \Rightarrow y' = 4^{\ln x}\ \dfrac{1}{x}\ \ln 4 = \dfrac{4^{\ln x}\cdot\ln 4}{x}$

12. $y = \cos^5(7x^2) \Rightarrow y' = -\,5\cos^4(7x^2)\cdot 14x\ \text{sen}(7x^2) = -70x\cos^4(7x^2)\ \text{sen}(7x^2)$

13. $y = (1 + 7x)^{\cos x} \Rightarrow y' = \cos x\,(1 + 7x)^{\cos x-1}\cdot 7 + (1 + 7x)^{\cos x}\ \text{sen}x\ .\text{Ln}(1+7x)$

Interpretación gráfica de la derivada. Cálculo de rectas tangentes.

El valor $f'(x_0)$ representa la pendiente de la tangente geométrica trazada a la curva de ecuación $y = f(x)$ por el punto $(x_0\ ,\ f(x_0))$ (Recuerda que la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicha recta con la parte positiva del eje X). Por tanto, la ecuación de dicha recta tangente será:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \quad \text{donde} \quad y_0 = f(x_0) \quad \text{y} \quad m = f'(x_0)$$

Ejemplos:

1.- Calcula la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto de abscisas $x_0 = 3$

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$ donde $y_0 = f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$ y $m = f'(x_0) = f'(3) = 6 \Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente pedida es $y - 9 = 6\,(x - 3)$ ó lo que es equivalente $y = 6x - 9$

2.- Calcula la recta tangente a la curva $y = e^{5x}$ en el punto de abscisas $x_0 = 0$

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$ donde $y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$ y $m = f'(x_0) = f'(0) = 5$ (observa que $f'(x) = 5e^{5x}$) $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente pedida es $y - 1 = 5\,(x - 0)$ ó lo que es equivalente $y = 5x + 1$

Diferencial de una función en un punto. Función diferencial.

Dada la definición de derivada $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ resulta que, cuando $x \approx x_0$, se verifica que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$, de donde, despejando, llegamos a que:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad \forall\, x \approx x_0}$$

Llamando diferencial de x, $dx = h = \Delta x = x - x_0$ se cumple que $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot dx$. Al término $f'(x_0)\cdot dx$ se le denomina **diferencial de f(x) en x_0** y se designa por $df_{x_0}(h)$ ó de forma más sencilla por $df(x_0)$. De forma más general:

$$\mathbf{df(x) = f'(x)\, dx}$$

Observa que $dx = \Delta x$ pero $df(x) \approx \Delta f(x)$

Ejemplos:

1. $f(x) = 4 \Rightarrow dy = df(x) = f'(x)\, dx = 0\cdot dx = 0$

2. $f(x) = 3x \Rightarrow dy = 3\cdot dx$

3. $f(x) = x^2 \Rightarrow df(x) = 2xdx$

4. $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow df(x) = \cos x \cdot dx$

5. Calcula la diferencial de la función $f(x) = e^{7x}$ en el punto $x = 0$ y evalúala en $dx = 0{,}01$.

$f'(x) = 7\, e^{7x} \Rightarrow f'(0) = 7 \Rightarrow df(0) = f'(0)\cdot dx = 7dx \Rightarrow$ para $dx = 0{,}01$ se cumple que $df(0) = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07$ (Esto significa que $f(x) \approx f(0) + f'(0)\,(x - 0)$ para $x \approx 0$, es decir, $e^{7x} \approx 1 + 7x \quad \forall\, x \approx 0$)

6.- Usando la diferencial, calcular el valor aproximado de $f(x) = x^3$ en el punto $x = 2{,}01$ sabiendo que $f(2) = 8$.

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \Rightarrow f(2{,}01) \approx f(2) + f'(2)\cdot(2{,}01 - 2)$ es decir, $f(2{,}01) \approx 8 + 12\cdot 0{,}01$ de donde se concluye que $f(2{,}01) \approx 8{,}12$ (Obsérvese que el verdadero valor, en este caso, de $f(2{,}01)$ sería $f(2{,}01) = 2{,}01^3 = 8{,}120601$, muy próximo al obtenido por diferenciales)

7.- Usando la diferencial, calcular el valor aproximado de $\text{Ln}(1{,}015)$.

Tomamos la función $f(x) = \text{Ln } x$ (derivable en $x = 1$) y punto $x_0 = 1$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \Rightarrow \text{Ln}(1{,}015) \approx \text{Ln}(1) + 1\cdot(1{,}015 - 1) = 0 + 0{,}015 = 0{,}015$. Es decir, $\text{Ln}(1{,}015) \approx 0{,}015$ (Obsérvese que el verdadero valor de $\text{Ln}(1{,}015)$ es $0{,}014888612\ldots..$)

Derivadas sucesivas.

Sea f(x) una función de una variable definida en el intervalo abierto (a , b) para la cual existe $f'(x)$ $\forall\ x \in (a , b)$. Si la función $f'(x)$ es a su vez derivable, entonces su derivada $(f')' = f''$ se llama **derivada segunda** de f(x). Análogamente podemos definir la **derivada tercera** f''', la **derivada cuarta** $f^{iv)}$, etc. derivando la función derivada de orden anterior.

Ejemplos:

1. $f(x) = e^{5x} \Rightarrow f'(x) = 5e^{5x} \Rightarrow f''(x) = 25e^{5x} \Rightarrow f'''(x) = 125e^{5x} \Rightarrow f^{iv)}(x) = 625e^{5x}$ y, de forma sucesiva, llegamos a que $\Rightarrow f^{n)}(x) = 5^n \cdot e^{5x}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(x) = \dfrac{6}{(x+1)^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{iv)}(x) = \dfrac{-24}{(x+1)^5}$ y, de forma sucesiva, llegamos a que $\Rightarrow f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$

Crecimiento y Decrecimiento.

Sea f(x) una función definida en un intervalo (a , b) y sea $x_0 \in (a , b)$.

a) Se dice que f es **creciente en x_0** si existe un intervalo $(x_0 - h , x_0 + h)$ contenido en (a , b) tal que $f(x) \le f(y)$ $\forall\ x , y \in (x_0 - h , x_0 + h)$ con $x < y$.

   Si la desigualdad es estricta, entonces f es **estrictamente creciente en x_0**.

b) Se dice que f es **decreciente en x_0** si existe un intervalo $(x_0 - h , x_0 + h)$ contenido en (a , b) tal que $f(x) \ge f(y)$ $\forall\ x , y \in (x_0 - h , x_0 + h)$ con $x < y$.

   Si la desigualdad es estricta, entonces f es **estrictamente decreciente en x_0**.

Si existe $f'(x)$ entonces:

- f(x) es creciente en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \ge 0$
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f(x) es estrictamente creciente en x_0
- f(x) es decreciente en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \le 0$
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f(x) es estrictamente decreciente en x_0
- Si $f'(x_0) = 0$, no se puede afirmar nada sobre el crecimiento o decrecimiento de f(x) en el punto x_0

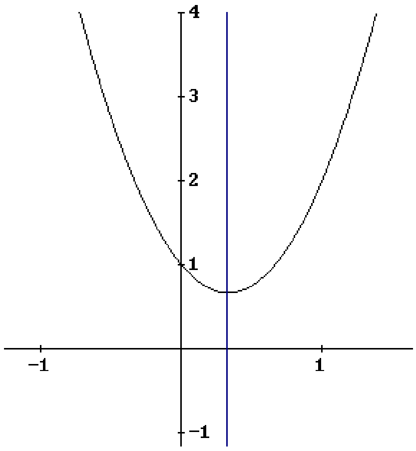
Ejemplos:

1.- Hallar los puntos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = 3x^2 - 2x + 1$

$$y' = 6x - 2 \quad \text{que se anula en} \quad x = \frac{1}{3}$$

Si $x < \frac{1}{3} \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ estrictamente decreciente en $(-\infty\ ,\ \frac{1}{3})$

Si $x > \frac{1}{3} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ estrictamente creciente en $(\frac{1}{3}\ ,\ \infty)$

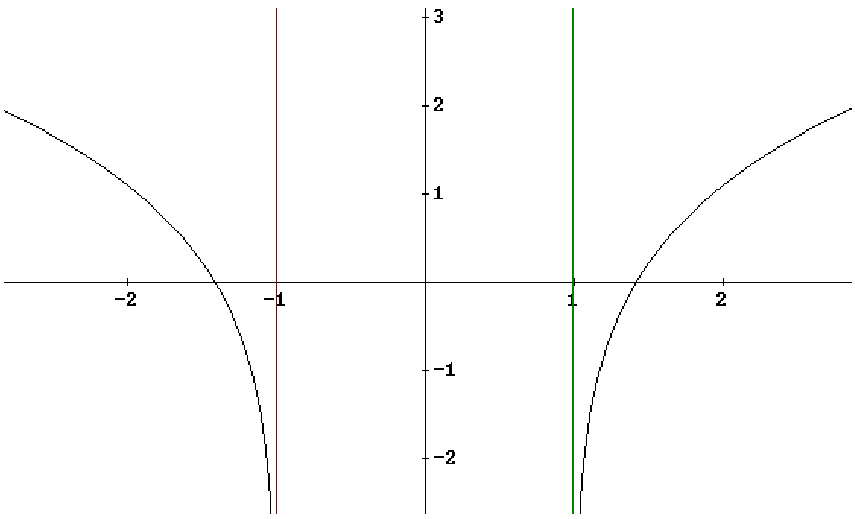


2.- Hallar los puntos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = L(x^2 - 1)$

$y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ Nota: y´ se anula en x = 0 pero observa que Dom f = $(-\infty , -1) \cup (1 , \infty)$

En $(-\infty , -1)$ es $y' = \dfrac{-}{+} < 0 \Rightarrow$ estrictamente decreciente

En $(1 , \infty)$ es $y' = \dfrac{+}{+} > 0 \Rightarrow$ estrictamente creciente

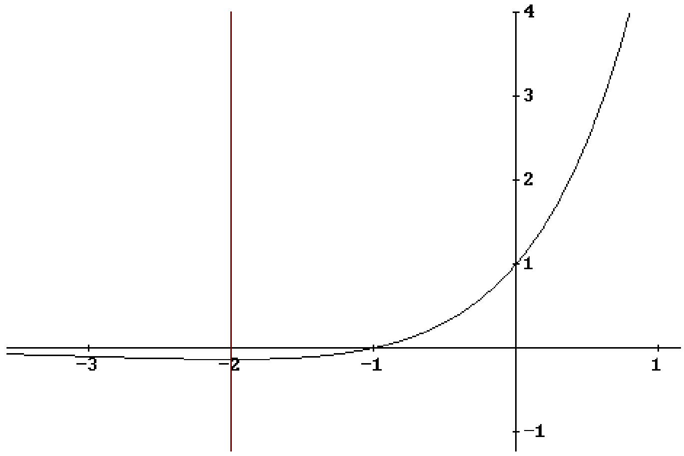


3.- Hallar los puntos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = (x + 1).e^x$

$y' = (x + 2)\cdot e^x$ que se anula en $x = -2$.

Si $x < -2 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ estrictamente decreciente

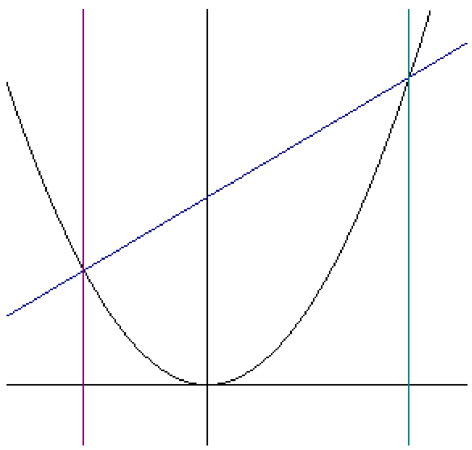
Si $x > -2 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ estrictamente creciente



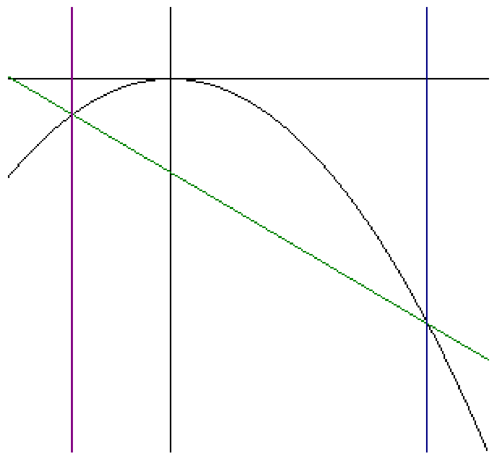
Concavidad y convexidad.

Una función f(x) es **convexa** en un intervalo (a , b) si para cada par de valores x_0, x_1 del intervalo (a , b), la recta que une los puntos $(x_0 , f(x_0))$ y $(x_1 , f(x_1))$ está por encima de la gráfica de f(x) en el intervalo (x_0 , x_1).

Una función f(x) es **cóncava** en un intervalo (a , b) si para cada par de valores x_0, x_1 del intervalo (a , b), la recta que une los puntos $(x_0 , f(x_0))$ y $(x_1 , f(x_1))$ está por debajo de la gráfica de f(x) en el intervalo (x_0 , x_1).



función convexa



función cóncava

Un **punto de inflexión** es aquel en el que la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

Si existe $f''(x_0)$ entonces:

- $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\;$ f es convexa en x_0

  f convexa en $x_0 \;\Rightarrow\; f''(x_0) \geq 0$
- $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\;$ f es cóncava en x_0

  f cóncava en $x_0 \;\Rightarrow\; f''(x_0) \leq 0$
- $f''(x_0) = 0$ y la primera derivada posterior que no se anula en x_0 es de orden impar $\Rightarrow$ x_0 es un punto de inflexión

Ejemplos:

1.- Hallar los intervalos en los que la función siguiente es cóncava o convexa: $f(x) = x^3 - 6x + 3$.

$f''(x) = 6x$.

Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ f es convexa en $(0, \infty)$

Si $x < 0$, entonces $f''(x) < 0 \;\Rightarrow\;$ f es cóncava en $(-\infty, 0)$

2.- Hallar los intervalos en los que la función siguiente es cóncava o convexa: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{\left(x^2+1\right)^3}$. El denominador es siempre positivo por serlo $x^2 + 1$, luego para estudiar el signo de $f''(x)$ basta ver el signo del numerador:

$2x^3 - 6x = 2x\,(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Tenemos los siguientes casos:

- $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \Rightarrow f''(x) < 0 \;\Rightarrow\;$ f es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3})$
- $x \in (-\sqrt{3}, 0) \;\Rightarrow f''(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ f es convexa en $(-\sqrt{3}, 0)$
- $x \in (0, \sqrt{3}) \;\Rightarrow\; f''(x) < 0 \;\Rightarrow\;$ f es cóncava en $(0, \sqrt{3})$
- $x \in (\sqrt{3}, \infty) \;\Rightarrow\; f''(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ f es convexa en $(\sqrt{3}, \infty)$

3.- Hallar los intervalos en los que la función siguiente es cóncava o convexa: $f(x) = x + \ln x$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ que es negativa para todo $x \in \text{Dom } f = (0, \infty)$. Por ello f es cóncava.

4.- Hallar los intervalos en los que la función siguiente es cóncava o convexa: $f(x) = x^2 + 7x - e^x$

$f''(x) = 2 - e^x$, que se anula en $x = \ln 2$.

- $x < \ln 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en $(-\infty , \ln 2)$
- $x > \ln 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(\ln 2 , \infty)$

<u>Cálculo de puntos óptimos para funciones de una variable</u>.

Para buscar los puntos óptimos de una función f se calculan primero sus **puntos estacionarios, críticos o singulares**, es decir, los puntos que verifiquen la ecuación

$f'(x) = 0$ *(condición necesaria)*

A continuación se calcula la segunda derivada, se evalúa en cada punto estacionario a obtenido y, teniendo en cuenta el signo de $f''(a)$, se tiene que:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow$ el punto a es un mínimo local de f
- $f''(a) < 0 \Rightarrow$ el punto a es un máximo local de f
- Si $f''(a) = 0$ entonces se sigue derivando hasta llegar al primer orden n $(n \geq 3)$ para el que $f^{n)}(a) \neq 0$.

  Si n es impar $\Rightarrow$ a es un punto de inflexión.

  Si n es par:

  - $f^{n)}(a) > 0 \Rightarrow$ el punto a es un mínimo local de f.
  - $f^{n)}(a) < 0 \Rightarrow$ el punto a es un máximo local de f.

Ejemplos:

1.- Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 12x^2 + 45x +30$

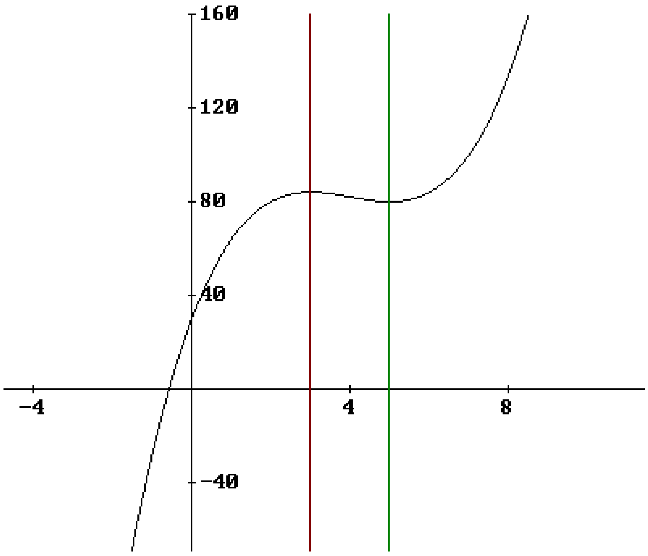
$y' = 3x^2 - 24x + 45$ que se anula en $x = 3$ y $x = 5$.

$y'' = 6x - 24$

en $x = 3$ es $y'' = -6 < 0 \Rightarrow x = 3$ es máximo de y (que vale 84)

en $x = 5$ es $y''= 6 > 0 \Rightarrow x = 5$ es mínimo de y (que vale 80)

Para calcular los puntos de inflexión observamos que y'' se anula en $x = 4$. Calculamos $y'''= 6 \Rightarrow$ en $x = 4$ es $y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ es punto de inflexión.



2.- Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo [-2 , 5]

$y' = 2x - 2$ que se anula en $x = 1$. Obsérvese que $x = 1 \in [-2, 5]$

$y'' = 2 \quad \forall x$. en particular en $x = 1$ es $y'' = 2 > 0 \Rightarrow x = 1$ es mínimo de y (que vale 0)

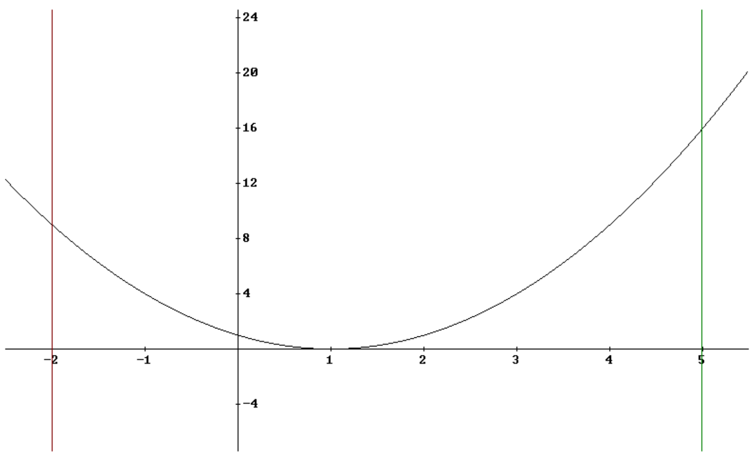
Por otra parte, como:

$y' > 0$ si $x > 1 \Rightarrow$ y es creciente si $x > 1$.

$y' < 0$ si $x > 1 \Rightarrow$ y es decreciente si $x < 1$.

Por ello la función y alcanza valores máximos en $x = -2$ y en $x = 5$.

Por otra parte, como $y'' \neq 0 \quad \forall x \Rightarrow$ no hay puntos de inflexión.



3.- Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

$y' = \dfrac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}$ que se anula en x = 0 y en x = -3

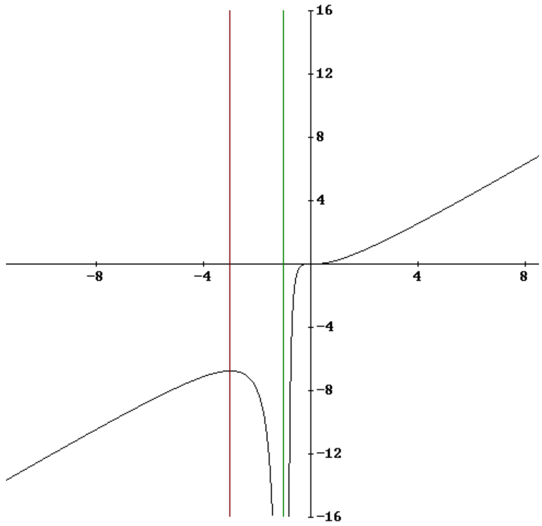
$y'' = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$

en x = 0 es y'' = 0 pero $y''' = \dfrac{6(1-3x)}{(1+x)^5}$ por lo que $y'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$

x = 0 es punto de inflexión de y

en x = -3 es $y'' = \dfrac{-9}{8} < 0 \Rightarrow$ x = -3 es máximo de y (que vale -6,75)

Como y´´ sólo se anula en x = 0 , y ya hemos visto que es un punto de inflexión, esta función no tendrá ya más puntos de inflexión.



<u>Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.</u>

Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en un intervalo (a–h , a+h) verificando que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla sirve para resolver indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, y también indeterminaciones de los tipos restantes, sin más que hacer alguna modificación para transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 6x + 9}{4x^2 + 5x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{16x - 6}{8x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{16}{8} = \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{2x} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\alpha}$ con $\alpha = \lim\limits_{x\to\infty}$ exponente$(\text{base} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(1 + \frac{7}{x} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} 14 = 14 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{2x} = e^{14}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} x^{5x} = \left[0^{0}\right] = e^{\alpha}$ donde $\alpha = \lim\limits_{x\to 0}$ exponente·Ln(base) $= \lim\limits_{x\to 0} 5x\cdot\text{Ln}(x) =$

$= [0\cdot(-\infty)] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{Ln}(x)}{\frac{1}{5x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{5x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to 0} -5x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^{5x} = e^{0} = 1$

6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\text{Ln}\,x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty\text{-}\infty] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x - 1 - \text{Ln}\,x}{(x-1)\text{Ln}\,x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\text{Ln}\,x + (x-1)\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\text{Ln}\,x + (x-1)}{x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\text{Ln}\,x + (x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\text{Ln}x + x\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Derivar las funciones:

a) $y = (1+8x^2)^{10}$ b) $y = (3x + 2)^2 \cos^2 x$

c) $y = \dfrac{x \ln x}{2x - 1}$ d) $y = \ln(9x^2-11)$

e) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ f) $y = \cos^5(7x^2)$

g) $y = x\sqrt[3]{e^{x^2}+1}$ h) $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$

i) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ j) $y = \sqrt[x]{\operatorname{arctg}(x^2)}$

Ejercicio 2.- Estudiar la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x.e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 3.- Calcular utilizando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x - x.\cos x}{1 - \cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x - x}{x - \operatorname{tg}x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x.\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}x} - \dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{Ln} x}{\sqrt[3]{x}}$

Ejercicio 4.- De una hoja de cartón cuadrada de lado 90 cm. hay que hacer una caja abierta que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y después doblando los salientes de la figura así obtenida. Determinar la longitud del lado de estos cuadrados recortados.

Ejercicio 5.- La función de ingresos mensuales de una empresa es $I(q) = - q^3 + 192q$, donde q es la cantidad producida cada mes. Calcular los ingresos máximos mensuales que puede obtener esta empresa.

Ejercicio 6.- El número de suscriptores de una revista de economía ha ido variando desde su lanzamiento hace 10 años según la ecuación $f(t) = 20t^3 - 360t^2 + 1620t$, donde t es el número de años transcurridos desde ese momento. Determinar cuándo se ha tenido un mayor y menor número de suscriptores y a cuánto ascendía dicha suscripción.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.-

a) $y' = 10(1 + 8x^2)^9\, 16x = 160x\,(1+ 8x^2)^9$

b) $y' = 2(3x + 2)\, 3\cos^2 x + (3x + 2)^2\, 2\cos x(-\operatorname{sen} x) =$

$= 6(3x + 2)\cos^2 x - 2\cos x \operatorname{sen} x(3x + 2)^2$

c) $y' = \dfrac{(\ln x+1)(2x-1)-2x\ln x}{(2x-1)^2}$

d) $y' = \dfrac{18x}{9x^2-11}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = \dfrac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$

f) $y' = -70x \operatorname{sen}(7x^2)\cos^4(7x^2)$

g) $y' = (e^{x^2}+1)^{1/3} + x(e^{x^2}+1)^{-2/3}\, e^{x^2}\, 2x = \sqrt[3]{e^{x^2}+1} + \dfrac{2x^2 e^{x^2}}{3\sqrt[3]{(e^{x^2}+1)^2}}$

h) $y' = \dfrac{2}{1+(2x+1)^2}$

i) $y' = \operatorname{sen} x^{\cos x}\left[\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right] - \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)$

j) $y' = \sqrt[x]{\operatorname{arctg} x^2}\left[\dfrac{2}{(1+x^4)\operatorname{arctg} x^2} - \dfrac{1}{x^2}\ln(\operatorname{arctg} x^2)\right]$

Ejercicio 2.-

a) $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ $\quad f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ $\quad$ Por tanto la función f(x) es derivable en $x = 0$ porque $f'(0^+) = f'(0^-)$.

b) $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$ $\quad f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0$, luego f no es derivable en x = 0 porque $f'(0^+) \neq f'(0^-)$.

Ejercicio 3.-

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - x.\cos x}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - x.\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - x}{x - \text{tg}x} = \frac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - x}{x - \text{tg}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{0}$$. Aplicando de nuevo L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}\,x}{-2\frac{\text{sen}\,x}{\cos^3 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty} x\cdot\text{Ln}\,\frac{1+x}{x} = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\text{Ln}\,\frac{1+x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\text{Ln}\,\frac{1+x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{Ln}\,\frac{1+x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x(1+x)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

d) $\lim_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{1/x} = 1^\infty = e^\alpha$ donde α = lím exponente · (base – 1)

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(e^x + x^3 - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x^3 - 1}{x} = \frac{0}{0}$$. Aplicando L'Hôpital:

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 3x^2}{1} = 1$$

En consecuencia: $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + x^3\right)^{1/x} = e^1 = e$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right) = \dfrac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital:

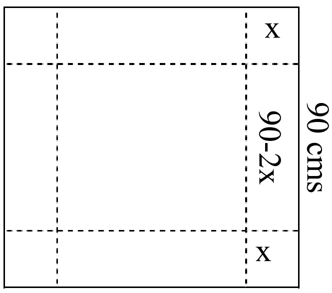
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \right) = \frac{0}{0}$$. Aplicando nuevamente L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{Ln} x}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{Lx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Ejercicio 4.-



Sea x el lado que se recorta en los ángulos. La caja es un paralelepípedo de base un cuadrado de lado $90 - 2x$ y altura x. Su volumen será $V(x) = (90 - 2x)^2 x = 8100 x + 4x^3 - 360x^2$

$V'(x) = 12x^2 - 720x + 8100$ que se anula en $x = 45$ y $x = 15$

$V''(x) = 24x - 720$

Como $V''(45) = 360 > 0$ y $V''(15) = -360 < 0$ el valor máximo vendrá dado cuando x =15. Así pues habrá que recortar un cuadrado de lado x =15 cms. y el volumen máximo conseguido será entonces de $V(15) = 54.000$ cm^3

Ejercicio 5.-

$I'(q) = -3q^2 + 192$; $I'(q) = 0 \Rightarrow q = 8$ ó $q = -8$.

Puesto que se trata de una función donde la variable q expresa una cantidad, la solución negativa carece de sentido y por lo tanto sólo se considera la solución $q = 8$.

$I''(q) = -6q \quad \Rightarrow \quad I''(8) = -48 < 0 \quad \Rightarrow$ el punto $q = 8$ es máximo.

Para obtener el ingreso máximo deberá producir 8 unidades al mes y el ingreso máximo es $I(8) = 1.024$ u.m.

<u>Ejercicio 6.-</u>

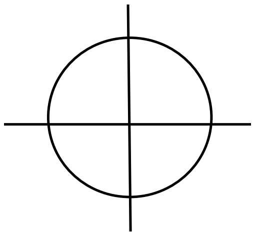
$f'(t) = 60t^2 - 720t + 1620 \quad ; \quad f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9$ ó $t = 3$, por lo que existen dos puntos estacionarios.
$f''(t) = 120t - 720$
$f''(9) = 360 > 0 \quad \Rightarrow$ en $t = 9$ se alcanza un mínimo y $f(9) = 0$
$f''(3) = -360 < 0 \quad \Rightarrow$ en $t = 3$ se alcanza un máximo y $f(3) = 2.160$

Para saber si estos óptimos son únicos (obsérvese que estamos en un intervalo cerrado, el [0, 10]), comparemos el valor de la función en dichos puntos con el valor de la función en los extremos del intervalo [0, 10] en el que varía t (aunque los extremos del intervalo no sean puntos estacionarios):
$f(0) = 0 \qquad f(10) = 200$

Luego $t = 3$ es máximo y $t = 9$ es mínimo, es decir, el número máximo de suscriptores fue de 2.160 al finalizar el tercer año de funcionamiento y el número mínimo se tuvo en el noveno año, momento en que no había ningún suscriptor (obsérvese que evidentemente en el momento 0, momento de lanzamiento de la revista, el número de suscriptores también era 0).

ANEXO 1. Representación gráfica de las curvas más usuales

1.- Circunferencia

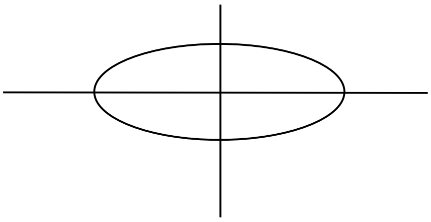


Las dos formas más habituales de presentar su ecuación son:

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ que es la circunferencia de centro el punto $C = (a, b)$ y radio el valor positivo r.

b) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ es circunferencia siempre que $A^2 + B^2 - 4C > 0$ y tiene de centro el punto $C = (-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ y radio $r = +\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}$

2.- Elipse



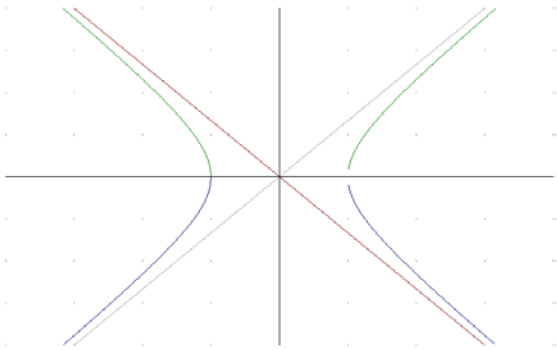
Su ecuación más genérica es $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

elipse de centro $C = (h, k)$ y ejes a y b de abscisas y ordenadas, respectivamente.

3.-Hipérbola

Su ecuación más genérica es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



y sus asíntotas son:

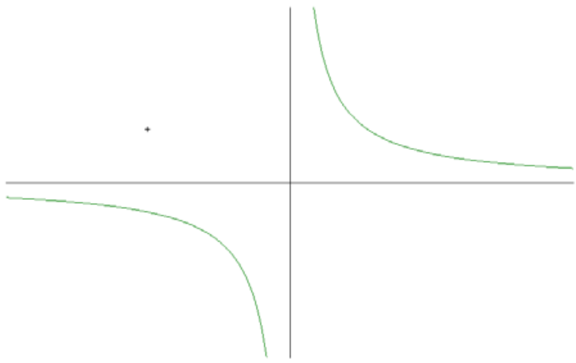
$$y - k = \frac{b}{a}(x-h)$$

$$y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

En particular, la hipérbola cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas tiene ecuación:

$y = \dfrac{k}{x}$ ó lo que es igual $y \cdot x = k$

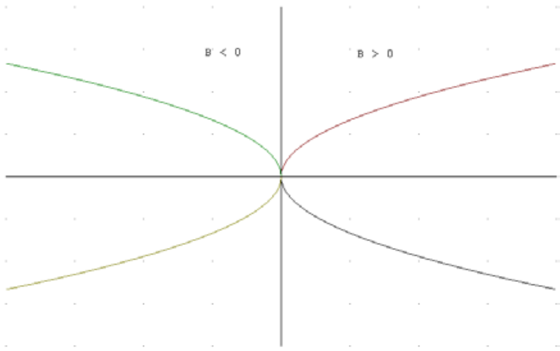
con $k \neq 0$.

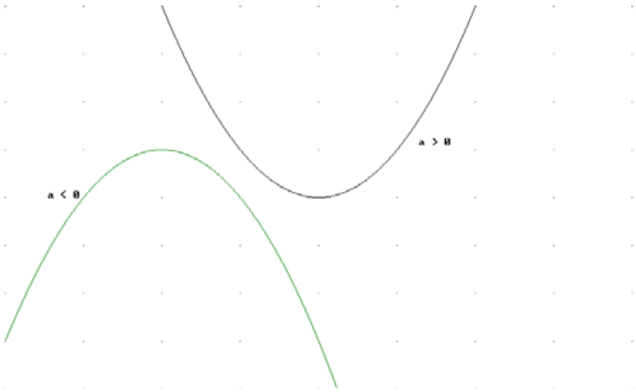


4.- Parábola.

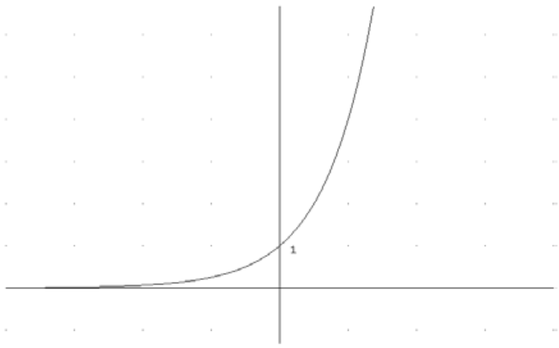
$y = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ,\ \dfrac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ y las ramas hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

$x = ay^2 + by + c$ con las ramas hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$.

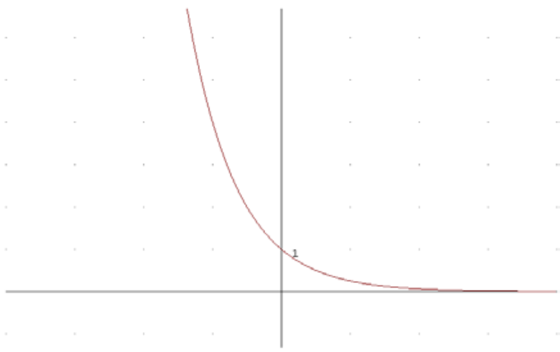




5.- Función exponencial. $f(x) = a^x$ con base $a > 0$



Si $a > 1$, la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal y la función es creciente y convexa.



Si $0 < a < 1$, la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal y la función es decreciente y convexa.

Para $a = 1$, la función es la recta horizontal $y = 1$

<u>Propiedades de la función exponencial</u>:

$a^0 = 1$ $\qquad\qquad$ $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \Re$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\qquad\qquad$ $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

6.- Función logarítmica. Base $a > 0$, de tal forma que $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

Propiedades

$\log_a 1 = 0$

$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ con $x > 0$ e $y > 0$

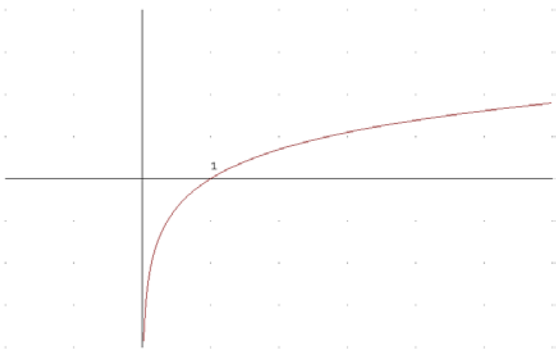
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\qquad$ con $x > 0$ e $y > 0$

$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ $\qquad$ con $x > 0$

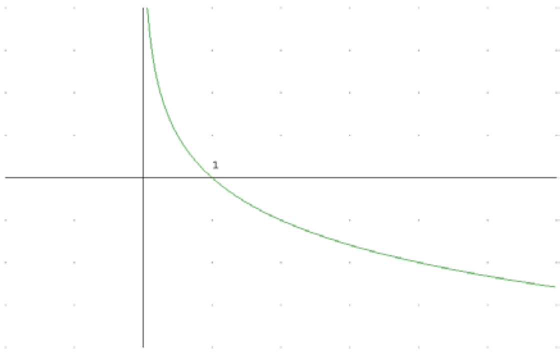
En el caso particular de que la base a sea el número e de Euler (**e** = 2.7182818...) tenemos la función **logaritmo neperiano** que se suele denotar como ln x ó Ln x.

En el caso particular de ser a = 10 es el **logaritmo decimal** que se escribe sin la base, o sea log x quiere decir $\log_{10}$ x.

Si a > 1 la recta x = 0 es una asíntota vertical y la función es creciente y cóncava.



Si $0 < a < 1$ la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función es decreciente y convexa.



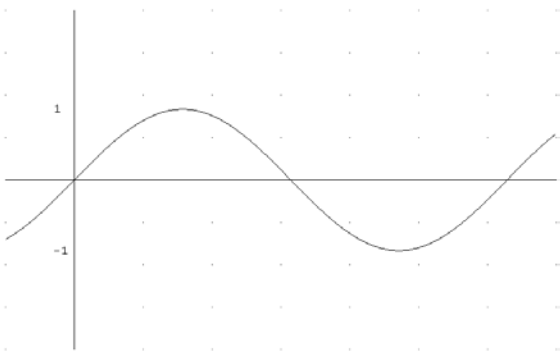
7.- Función seno. Es una aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1\ ,\ 1]$

$x \rightarrow \operatorname{sen} x$

Es una función periódica de periodo 2π cuya gráfica dentro del periodo $[0\ ,\ 2\pi]$ es $\rightarrow$

La función cosecante se define como

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$



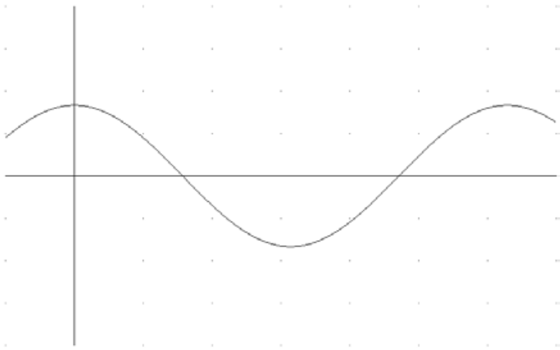
8.- Función coseno. Es una aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1\ ,\ 1]$

$x \rightarrow \cos x$

Es una función periódica de periodo 2π cuya gráfica dentro del periodo $[0\ ,\ 2\pi]$ es $\rightarrow$

La función secante se define como

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

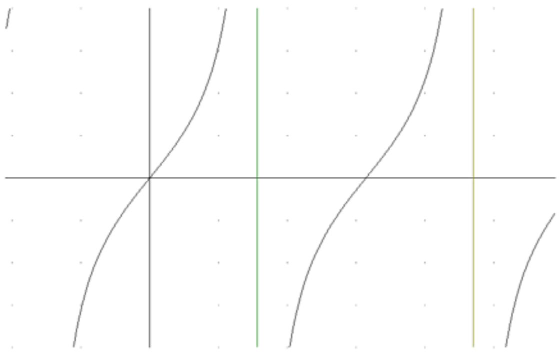


9.- Función tangente. $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Su dominio es $D = \left\{ x \in \Re \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ ,\ k \in Z \right\}$

Es una función periódica de periodo π, cuya gráfica es $\rightarrow$

La función cotangente se define como

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$



Como valores más representativos de estas funciones trigonométricas estudiadas tenemos:

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$

nota: el equivalente de grados y radianes es: $\pi = 3{,}141592\ldots$ radianes equivalen a 180º

ANEXO 2. Representación gráfica de funciones de una variable

Para construir una gráfica es necesario, por lo general, combinar diversas técnicas. A continuación exponemos un plan que hay que entender como algo orientativo.

1.- Dominio de definición de la función.
2.- Si la función es par {f(x) = f(-x), simétrica respecto al eje de ordenadas} o impar {f(x) = -f(-x), simétrica respecto al origen} basta estudiarla para los valores de $x \geq 0$.
3.- Si la función es periódica basta estudiarla en un periodo.
4.- Puntos de corte con los ejes. Con el eje OY solución de la ecuación y = f(x) para x = 0. Con el eje OX solución de y = f(x) para y = 0.
5.- Cálculo de las asíntotas.

Asíntotas horizontales:

La recta y = m es una asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = m$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$.

Asíntotas verticales.

La recta x = a es una asíntota vertical si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Asíntotas oblicuas.

Es la recta y = mx + n siendo $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$

6.- Máximos y mínimos.
7.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
8.- Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.
9.- Estudio de los puntos de discontinuidad y no derivabilidad y los puntos frontera del dominio de definición.

Ejercicio.- Hallar las asíntotas de las funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ b) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ c) $y = \frac{x^2}{x - 7}$

Soluciones

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow$ y = 0 es asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} = \pm\infty \quad \Rightarrow \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{x^2-1} = \pm\infty \quad \Rightarrow \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0 \;\Rightarrow\; \text{no tiene asíntota oblicua.}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty \;\Rightarrow \text{no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty \quad\Rightarrow\; x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty \quad\Rightarrow\; x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - 1\cdot x = -1$$

Por consiguiente la recta y = 1·x – 1 = x-1 es asíntota oblicua.

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-7}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-7} = \infty \quad\Rightarrow\; \text{no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2}{x-7} = \pm\infty \Rightarrow x = 7 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-7}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-7} = 1 \ ; \ n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-7} - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{7x}{x-7} = 7$$

Por consiguiente la recta y = 1·x + 7 = x + 7 es asíntota oblicua.

Ejercicio.- Hacer el estudio analítico completo y representar gráficamente las funciones:

a) $y = x + \frac{1}{x}$

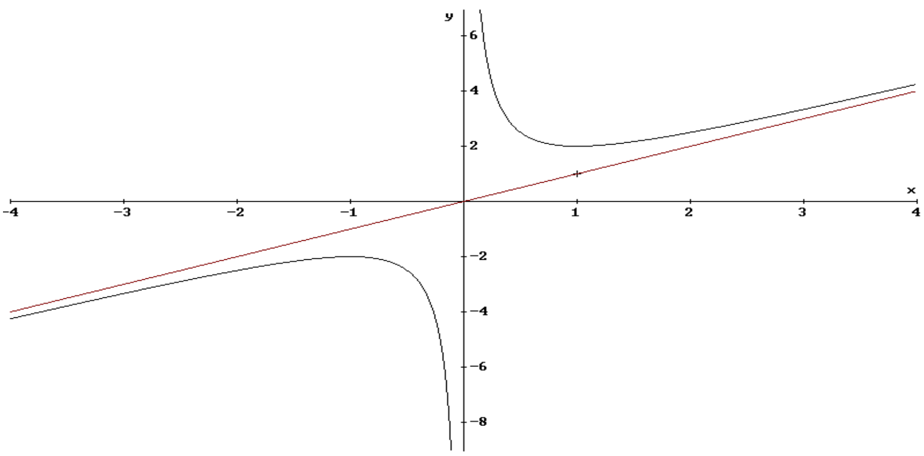
b) $y = \frac{1}{x^4 - 2x^2}$

c) $y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$

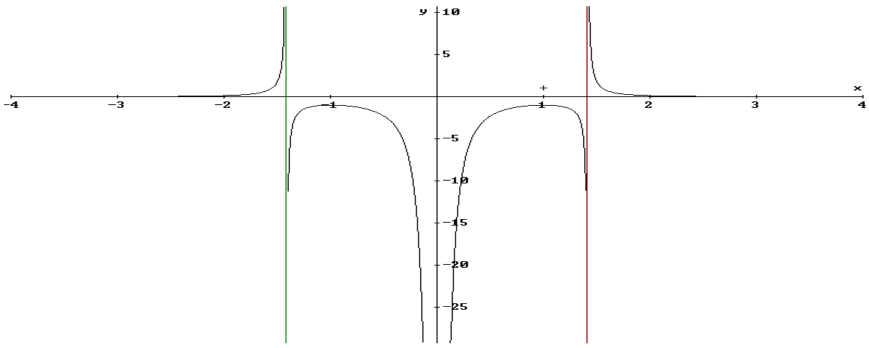
d) $y = Ln\,(x^2 + 3x - 4)$.

<u>**Soluciones**</u>

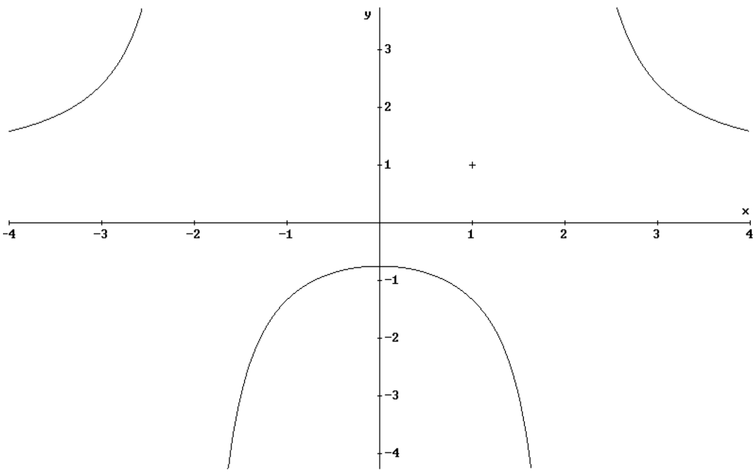
a) $y = x + \frac{1}{x}$



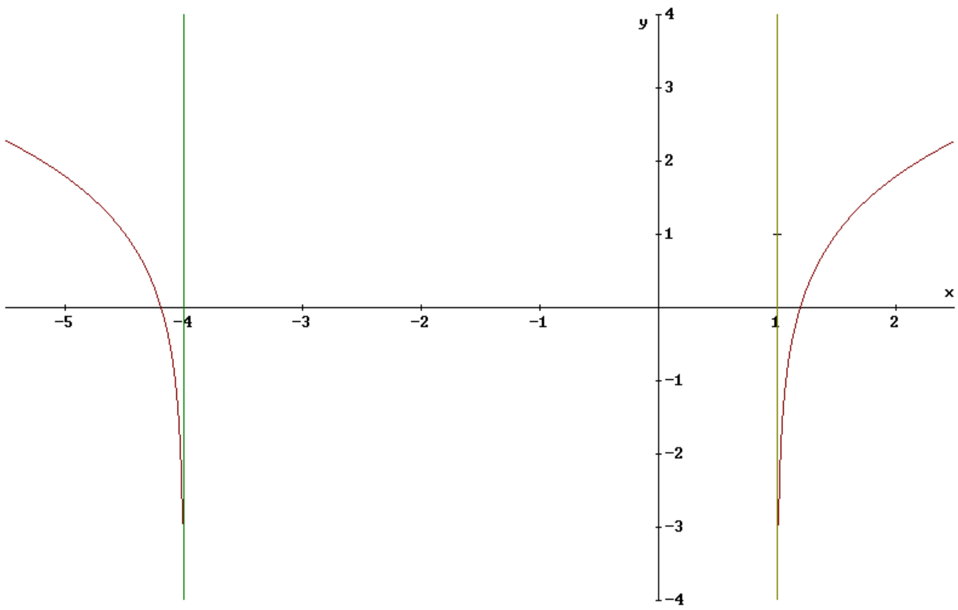
b) $y = \frac{1}{x^4 - 2x^2}$



c) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$



d) $y = Ln(\ x^2 + 3x - 4\ )$



ANEXO 3. Diferencial 2ª y sucesivas para funciones de una variable

recordando que la diferencial primera de f(x) se define domo $df = f'(x)\cdot dx$ definimos:

diferencial segunda de $f(x) = d^2f = f''(x)\cdot(dx)^2$

diferencial tercera de $f(x) = d^3f = f'''(x)\cdot(dx)^3$

diferencial cuarta de $f(x) = d^4f = f^{iv)}(x)\cdot(dx)^4$

y así sucesivamente, es decir, si f(x) es n veces derivable, se define la diferencial n-ésima de f(x) como $d^nf = f^{n)}(x)\cdot(dx)^n$

Así, por ejemplo, si $f(x) = e^{5x}$

$f'(x) = 5e^{5x} \Rightarrow df(x) = 5e^{5x}$

$f''(x) = 25e^{5x} \Rightarrow d^2f = 25e^{5x}(dx)^2$

$f'''(x) = 125e^{5x} \Rightarrow d^3f = 125e^{5x}(dx)^3$

$f^{iv)}(x) = 625e^{5x} \Rightarrow d^4f = 625e^{5x}(dx)^4$

y, de forma sucesiva, llegamos a que $f^{n)}(x) = 5^n\cdot e^{5x} \Rightarrow d^nf = 5^n\cdot e^{5x}\cdot(dx)^n$

BIBLIOGRAFÍA

Además de los libros de Bachillerato, donde esta materia viene muy bien explicada, y con abundantes problemas, recomendamos para hacer más ejercicios el libro siguiente:

GALÁN, CASADO, FERNÁNDEZ y VIEJO (2.002): *Matemáticas para la Economía y la Empresa. Ejercicios Resueltos*. Editorial AC-THOMSON