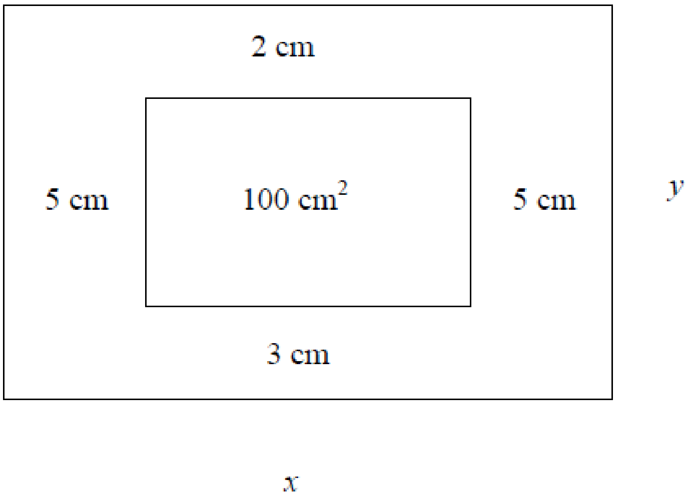
Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.



Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x \cdot y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $100 = (x-10)\cdot(y-5) \Rightarrow y = \dfrac{50+5x}{x-10}$

Paso 3: Sustituimos: $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{50+5x}{x-10} = \dfrac{50x+5x^2}{x-10}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2-100x-500 = 0 \Rightarrow x = 24'14\ ;\ x = -4'14$$

Como es una longitud, el valor es: $x = 24'14$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada y comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{2000}{(x-10)^3} \Rightarrow S''(x=24'14) = 0'70 \Rightarrow \textit{mínimo}$$

Luego las dimensiones de la tarjeta son: $x = 24'14\ cm\ ;\ y = 12'07\ cm$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Integramos dos veces, por partes, para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x) = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ \ du = dx \\ dv = e^x dx;\ v = e^x \end{array}}$$

$$f(x) = \int \left(x \cdot e^x - e^x + C \right) dx = x \cdot e^x - e^x - e^x + Cx + D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(0,0) \Rightarrow 0 - e^0 - e^0 + o + D = 0 \Rightarrow D = 2$

- Extremo relativo en $x = 1 \ \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow e - e + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Luego, la función es: $f(x) = x \cdot e^x - 2e^x + 2$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

a) [1,25 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1,25 puntos] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

---

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 3+6-2m+4-9 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } m=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } m=2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

	R(A)	R(M)	
$m = 2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = 2$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left. \begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1-3t \\ y = t \\ z = 1+2t \end{array} \right.$

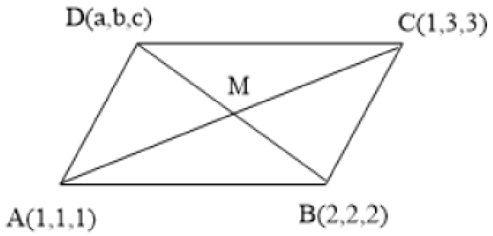
Si $z = 17$, la solución del sistema sería: $x = -23$; $y = 8$; $z = 17$

Ejercicio 4.- Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D.



a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,1)$ y $\vec{AC}=(0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(0,-2,2)$$

$$Área=módulo\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,1)$ y $\vec{AC}=(0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-1 & 1 & 2\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-z=0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M=\frac{A+C}{2}\Rightarrow M=\frac{(1,1,1)+(1,3,3)}{2}=(1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow(1,2,2)=\frac{(2,2,2)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,2,2)$$