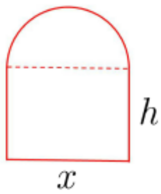
Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min}=x+2h+\pi\dfrac{x}{2}=2h+\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)x$

b) Relación entre las variables: $16=x\cdot h+\dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2}\Rightarrow 16=x\cdot h+\dfrac{\pi x^2}{8}\Rightarrow h=\dfrac{128-\pi x^2}{8x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min}=2h+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x=2\cdot\frac{128-\pi x^2}{8x}+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x=\frac{128-\pi x^2}{4x}+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x=\frac{128+(\pi+4)x^2}{4x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min}=\frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x-4\cdot\left(128+(\pi+4)x^2\right)}{16x^2}=\frac{4\cdot(\pi+4)x^2-512}{16x^2}=\frac{(\pi+4)x^2-128}{4x^2}=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}$$

e) Calculamos la segunda derivada:

$$P''=\frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x^2-8x\cdot\left((\pi+4)x^2-128\right)}{16x^4}=\frac{128}{2x^3}=\frac{64}{x^3}$$

$$P''\left(x=\sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}\right)>0\Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, el valor de la base es: $x=\sqrt{\dfrac{128}{(\pi+4)}}=4'23\ m$

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

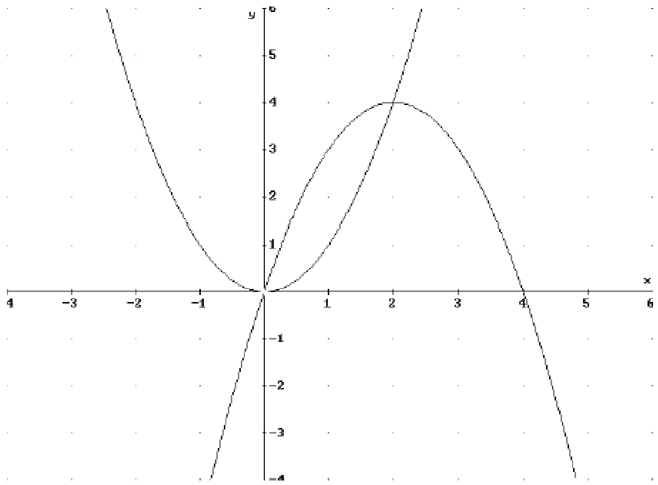
a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.

---

a) Las dos funciones son parábolas y podemos dibujarlas dibujarla fácilmente con una tabla de valores.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2$$

Las dos funciones se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 \left((-x^2 + 4x) - (x^2)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\ dx$$

c) Calculamos el área

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + \frac{16}{2}\right) - (0) = \frac{8}{3}\ u^2$$

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

a) Calculamos la matriz $A+\lambda I$.

$$A+\lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que no tenga inversa el determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \,;\, \lambda = -2 \,;\, \lambda = 3$$

Luego, la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa para los valores: $\lambda = 2$; $\lambda = -2$; $\lambda = 3$.

b) Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r} -2x-2y=-3x \\ -2x+\ \ y=-3y \\ -2z=-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2y \,;\, y = y \,;\, z = 0$

Si $x=1$, entonces la solución es: $x=1$; $y=\dfrac{1}{2}$; $z=0$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3t \\ y & = & -2 \\ z & = & t \end{array}\right.$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

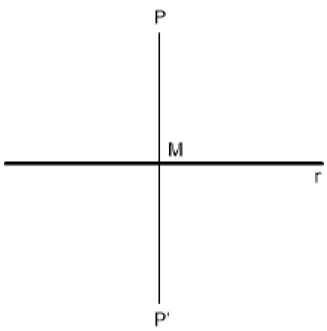
---

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1,-2,0)$ y su vector director $\vec{u} = (3,0,1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1,-1,0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3,0,1)$ y $\vec{PA} = (0,-1,0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+3z+1=0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1+3t,-2,t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1+3t-1,-2+1,t-0) = (3t,-1,t)$. Queremos que el vector $\vec{PM}$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3,0,1)$, luego: $\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (3t,-1,t)\cdot(3,0,1) = 0 \Rightarrow 9t+t=0 \Rightarrow t=0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1,-2,0)$.
Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,0)+(a,b,c)}{2} = (1,-2,0) \Rightarrow P' = (1,-3,0)$$