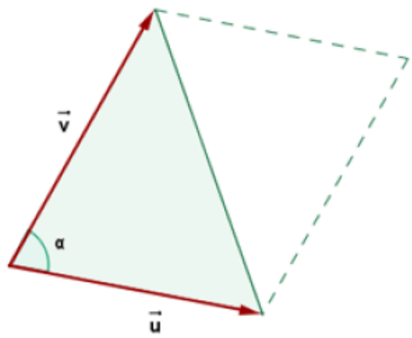
ÁREAS Y VOLÚMENES

Área del triángulo



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

Ejemplo:

Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

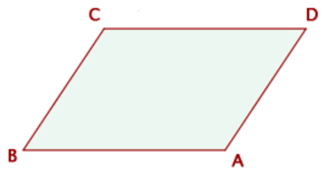
$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

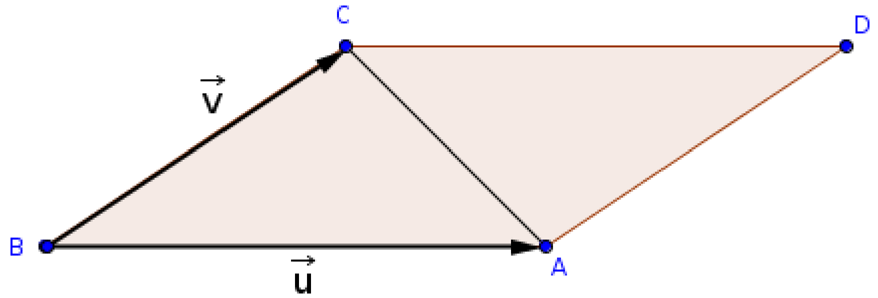
$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

Área de un paralelogramo

Si queremos calcular el área de un paralelogramo de vértices A, B, C y D como el de la figura:



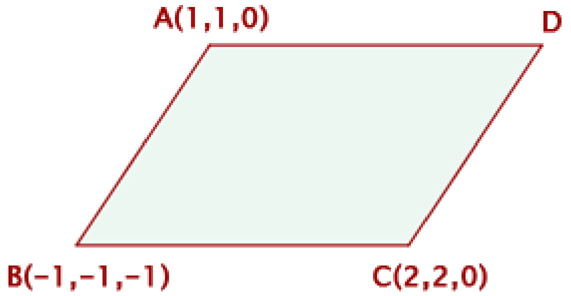
Podemos usar el producto vectorial, ya que:



$$A_{paralelogramo} = |\vec{u} x \vec{v}|$$

<u>Ejemplo:</u>

Calcula el área del paralelogramo de la figura:



Solución:

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right|$$

$$\overrightarrow{BC} = (3,3,1) \qquad \overrightarrow{BA} = (2,2,1)$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\, u^2$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u}(3,1,-1)$ y $\vec{v}(2,3,4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.·

Solución:

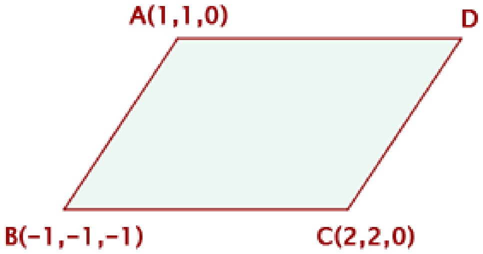
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

¿Cómo encontrar un vértice desconocido en un paralelogramo?

Ejemplo:

Encuentra las coordenadas del punto D:



Calculamos las coordenadas de M, punto medio del segmento $\overline{AC}$

$$M = \frac{A + C}{2} \Rightarrow M = \frac{(1,1,0) + (2,2,0)}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

Calculamos ahora las coordenadas del vértice D:

$$M = \frac{B + D}{2} \Longrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \frac{(-1,-1,-1) + (a,b,c)}{2} \Longrightarrow D = (4,4,1)$$

Volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores

El **volumen de un paralelepípedo** determinado por los vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ es igual a**l producto mixto**, en valor absoluto. Es decir:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Calcula el volumen de un paralelepípedo, formado con los vectores $\vec{u}(3, -2,5)$, $\vec{v}(2,2, -1)$ y $\vec{w}(-4,3,2)$.

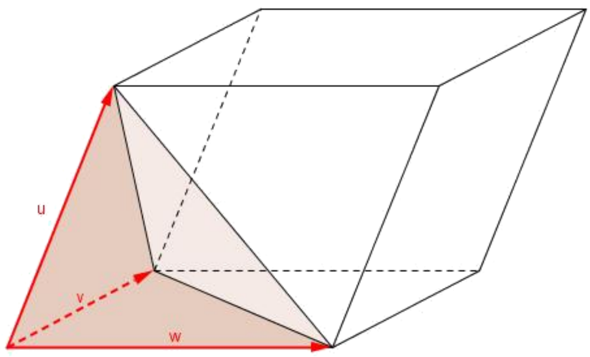
Solución:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Volumen del tetraedro determinado por tres vectores

El **volumen de un tetraedro** determinado por los vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto. Es decir:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



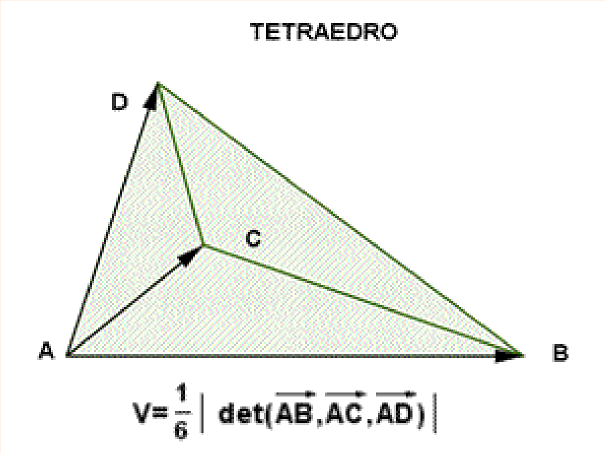
Ejemplo:

Calcula el volumen del tetraedro definido por los vectores $\vec{u}(-2,0,3)$, $\vec{v}(1, -2,2)$ y $\vec{w}(-2, -1,6)$.

Solución:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}u^3$$

Si nos dan los puntos que corresponden con los vértices, podremos calcular los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:



Ejemplo

Obtener el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

Solución

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} u^3$$