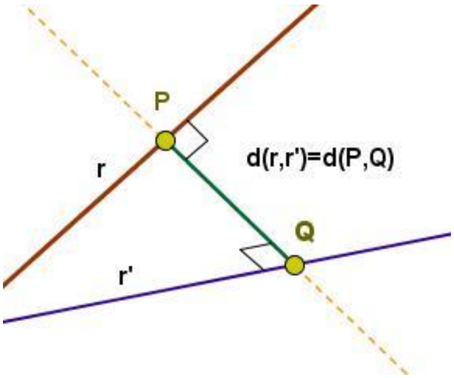
PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Seguro que cuando has estado paseando por algunas de las calles de tu ciudad has observado cables que cruzan de unos edificios a otros. Algunos pueden ser eléctricos, otros telefónicos.

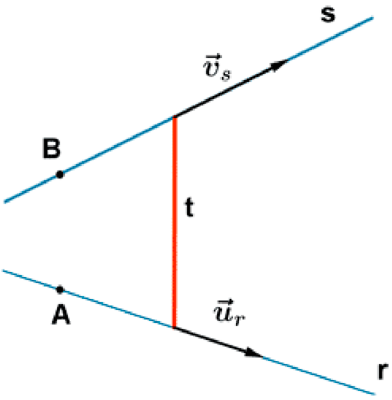
Esos cables siempre están colocados de forma que la distancia que recorre por medio de la calle sea lo más corta posible, por lo tanto, suelen ser perpendiculares a las fachadas de las que salen.



En este apartado vamos a ver que hay dos métodos diferentes para calcular esta línea perpendicular a dos rectas conocidas.

<u>Modo 1 (sin usar planos)</u>

Si tenemos dos rectas, r y s, que se cruzan, podemos encontrar la ecuación de la perpendicular común a ambas, t, siguiendo estos pasos:



1. Hallamos un punto genérico A de la recta r (que dependerá de su parámetro, por ejemplo, t).
2. Hallamos otro punto B genérico de la recta s (dependerá de otro parámetro s).
3. Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$, que dependerá de dos parámetros.

4. Imponemos que el vector anterior sea perpendicular a las dos rectas, r y s, y por lo tanto, los productos escalares por sus vectores de dirección deben dar cero.
5. Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Al resolverlo hallamos los valores de los parámetros t y s y por tanto los puntos A y B que están sobre la perpendicular.
6. Por último, calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B

Ejemplo:

Dadas las rectas $r \equiv x-1=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ y $r' \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=z-1$.
Halla la perpendicular común a las dos rectas.
Solución

Elegimos un punto $P(1+t,-2+t,3-t)$ de r y un punto $Q(-1+3s,1-s,1+s)$ de r'.

Calculamos el vector:
$\overrightarrow{PQ}=(-1+3s-1-t,1-s+2-t,1+s-3+t)=(-2+3s-t,3-s-t,-2+s+t)$.

Imponemos que sea perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y nos aparecen dos ecuaciones al imponer esas dos condiciones.

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=1\cdot(-2+3s-t)-1\cdot(3-s-t)-1\cdot(-2+s+t)=-2+3s-t-3+s+t+2-s-t=3s-t-3=0$$

$$\vec{w}\cdot\overrightarrow{PQ}=3\cdot(-2+3s-t)-1\cdot(3-s-t)+1\cdot(-2+s+t)=-6+9s-3t-3+s+t-2+s+t=11s-t-11=0$$

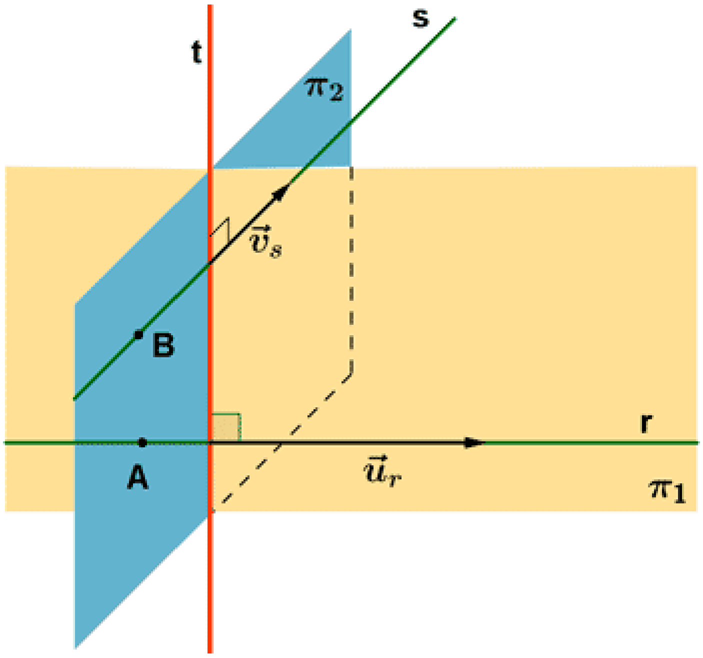
Resolviendo el sistema resultante $\begin{cases} 3s-t-3=0 \\ 11s-t-11=0 \end{cases} \Longrightarrow t=0 \ \ y \ \ s=1$.

Luego los puntos que están sobre la perpendicular son $P(1,-2,3)$ y $Q(2,0,2)$.

De donde la recta que corta perpendicularmente a r y r' es:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z-3}{2-3} \Longrightarrow x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

Modo 2 (con planos)



Si queremos hallar la recta que corta perpendicularmente a dos rectas que se cruzan, podemos seguir el siguiente proceso:

1. Hallamos un vector perpendicular a las dos rectas. Basta hallar el producto vectorial de los vectores dirección. Ese vector es el director de la recta buscada.
2. Calculamos un plano que contenga a r y tenga el vector hallado antes como director.
3. Determinamos otro plano que contenga a r' y al vector perpendicular hallado en el apartado 1.
4. La recta buscada es la intersección de los dos planos hallados.

Ejemplo:

Hallar la perpendicular común a las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-5}{3} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

$$r:\begin{cases}A(-3,2,5)\\ \vec{u}=(2,1,3)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}B(2,1,3)\\ \vec{v}=(-1,3,-2)\end{cases}$$

En primer lugar se calcula el producto vectorial de los vectores directores de cada recta.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ u_1&u_2&u_3\\ v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&1&3\\ -1&3&-2\end{vmatrix}=-11\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=(-11,1,7)$$

La recta perpendicular común, t, se obtiene como la intersección de los planos:

π_1 : determinado por r y $\vec{w}$

π_2 : determinado por s y $\vec{w}$

$$t:\begin{cases}\pi_1:\begin{cases}r\\ \vec{w}\end{cases}\\ \\ \pi_2:\begin{cases}s\\ \vec{w}\end{cases}\end{cases}\Rightarrow t:\begin{cases}\pi_1:\begin{vmatrix}x-x_1&u_1&w_1\\ y-y_1&u_2&w_2\\ z-z_1&u_3&w_3\end{vmatrix}=0\\ \\ \pi_2:\begin{vmatrix}x-x_2&v_1&w_1\\ y-y_2&v_2&w_2\\ z-z_2&v_3&w_3\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x+3&2&-11\\ y-2&1&1\\ z-5&3&7\end{vmatrix}=4x-47y+13z-41=0$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x-2&-1&-11\\ y-1&3&1\\ z-3&-2&7\end{vmatrix}=23x+29y+32z-171=0$$

$$t:\begin{cases}4x-47y+13z-41=0\\ 23x+29y+32z-171=0\end{cases}$$