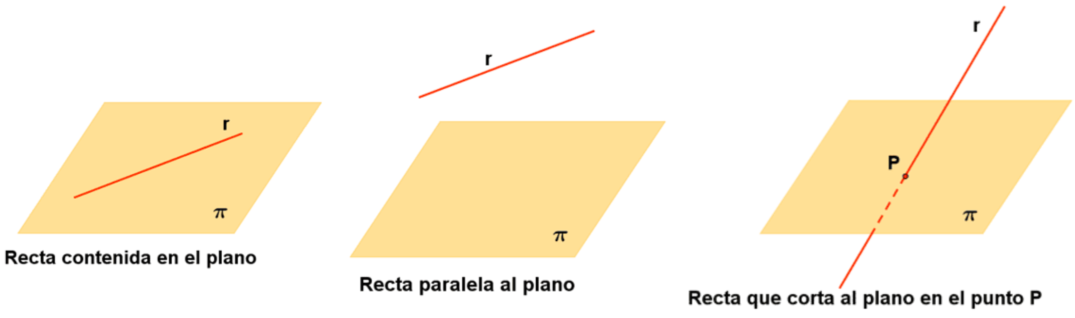
POSICIÓN RELATIVA DE UN PLANO Y UNA RECTA EN EL ESPACIO

Al estudiar la posición relativa de una recta y un plano se puede dar alguno de estos tres casos:



La posición relativa de una un plano y una recta la determinaremos mediante la ecuación general del plano y las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D2=0 \end{cases}$$

$$\pi: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

Consideraremos las matrices M, matriz de los coeficientes y M', matriz ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M'=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

- Si $rg(M)=rg(M')=3$, el sistema es compatible determinado. La recta y el plano son secantes.
- Si $rg(M)=2$ y $rg(M')=3$, el sistema es incompatible. No hay puntos en común. La recta y el plano son paralelos.
- Si $rg(M)=rg(M')=2$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son infinitas. La recta está contenida en el plano.

Resumen:

Posición relativa	Ecuaciones de la recta y el plano	Rango (M)	Rango (M')
Recta contenida en el plano Sistema compatible indeterminado	$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D2 = 0 \end{cases}$	2	2
Recta y plano paralelos Sistema incompatible	$\pi: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$	2	3
Recta y plano secantes Sistema compatible determinado	$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$	3	3

Ejemplo 1.

Determina la posición relativa de las rectas y los planos siguientes:

a) $\pi: 2x + y - 4z + 1 = 0$ $\quad r: \begin{cases} x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\pi: x - 3y + z - 2 = 0$ $\quad r: \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\pi: x + y + x = 0$ $\quad r: \begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

a) $\pi: 2x + y - 4z + 1 = 0$

$$r: \begin{cases} x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$$

Consideramos las matrices M y M':

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow rg(M') = 3$$

Como $rg(M) = 2$ y $rg(M') = 3$, la recta y el plano son paralelos.

b) $\pi : x - 3y + z - 2 = 0$

$$r : \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Consideramos las matrices M y M':

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 3$$

Como $rg(M) = 3$, $rg(M') = 3$.

La recta y el plano son secantes.

c) $\pi : x + y + x = 0$

$$r : \begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Consideramos las matrices M y M':

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow rg(M') = 2$$

$rg(M) = rg(M') = 2$, la recta está contenida en el plano.

La recta viene definida por un punto y un vector.

Si la recta viene definida por un punto y un vector, la escribiremos en forma implícita.

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2} \quad \Rightarrow \quad v_2(x-x_0)=v_1(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{z-z_0}{v_3} \quad \Rightarrow \quad v_3(x-x_0)=v_1(z-z_0)$$

$$\begin{cases} v_2x-v_1y+(y_0v_1-x_0v_2)=0 \\ v_3x-v_1z+(z_0v_1-x_0v_3)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Una vez tenemos la ecuación de la recta dada en su forma implícita, podemos determinar la posición relativa de la recta y el plano.

Ejemplo 2.

Estudiar la posición relativa de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = z+3 \qquad \pi : x - 2y + z - 4 = 0$$

Escribimos la ecuación de la recta en forma implícita:

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = z+3$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{2} \\ \\ \dfrac{y}{2} = z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ y-2z-6=0 \end{cases}$$

Una vez escrita la recta en forma implícita, consideramos las matrices M y M':

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 3$$

Como $rg(M) = 3$, $rg(M') = 3$

Por lo tanto, la recta y el plano son secantes.