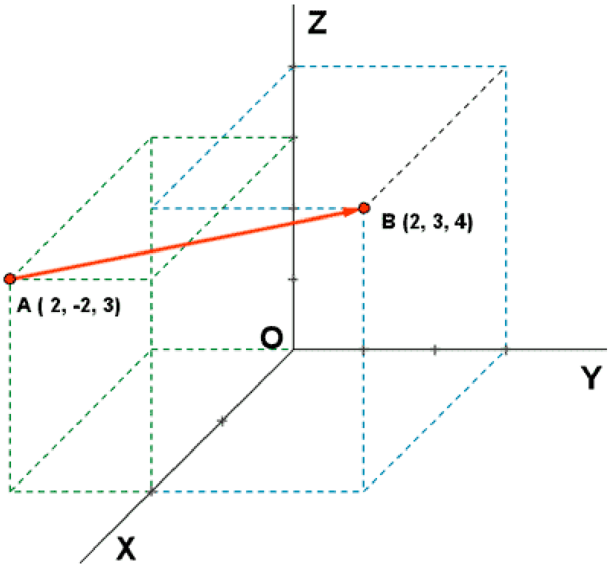
DISTANCIAS ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

Dados $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del espacio, definimos la distancia entre los puntos A y B como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del punto A(2, -2,3) al punto B(2,3,4)



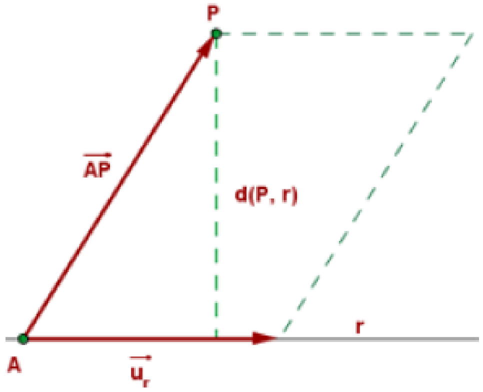
La distancia entre A y B es:

$$d(A, B) = \sqrt{(2-2)^2 + (3-(-2))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(0)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Distancia entre un punto y una recta

La **distancia de un punto**, P, **a una recta**, r, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos de la recta.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto hasta la recta.**



$$\text{Área del paralelogramo} = \text{base} \times h \rightarrow h = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}}$$

$$h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$$

Ejemplos

1. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 3, −2) a la **recta**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (1-2, 3+1, -2-1) = (-1, 4, -3) \qquad \vec{u}_r = (3, 1, -2)$$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 11\vec{j} + 13\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{5^2 + 11^2 + 13^2} = 3\sqrt{35} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$d(P,r) = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

2. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 2, 3) a la **recta**

$$r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{AP} = (1-2, 2-3, 3-4) = (-1,-1,-1) \qquad \vec{u}_r = (4,4,2)$$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$d(P,r) = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Distancia de un punto a un plano

La **distancia** de un **punto**, P, a un **plano**, π, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos del plano.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto al plano**.

$$P(x_0, y_0, z_0) \qquad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Hallar la distancia del punto P(3, 1, −2) a los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2y - 3 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2\cdot 3 + 1\cdot 1 - 1\cdot(-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

2. Hallar la distancia del punto Q(5, 5, 3) al plano $\pi \equiv (x, y, z) = (0, 0, -4) + (2, 2, -1)\lambda + (-3, 2, 0)\mu$.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 2 & 2 \\ z+4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x + 3y + 10z + 40 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|5\cdot 2 + 3\cdot 5 + 10\cdot 3 + 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

Distancia de una recta al plano

Dada la recta r y el plano π

- Si la recta y el plano se cortan → la distancia es cero
- Si no se cortan (la recta r y el plano son paralelos o la recta en el plano)
  - $d(r,\pi) = di(P,\pi), P \in r$

Distan entre planos paralelos

Para calcular la **distancia entre dos planos paralelos**, se halla la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

También se puede calcular de esta otra forma:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Calcular la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 2y - 4z + 15 = 0$.

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

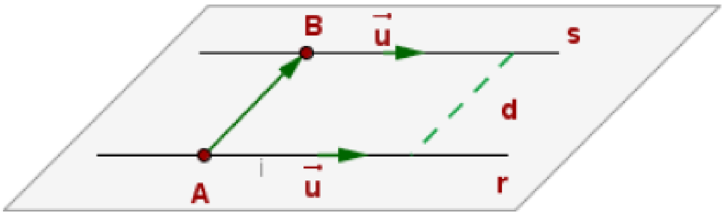
Los dos planos son paralelos.

Transformamos la ecuación del segundo plano para que los dos planos tengan el mismo vector normal.

$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\frac{15}{2} - 5\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

La **distancia de una recta**, r, a **otra paralela**, s, es la distancia desde un punto cualquiera de r a s.

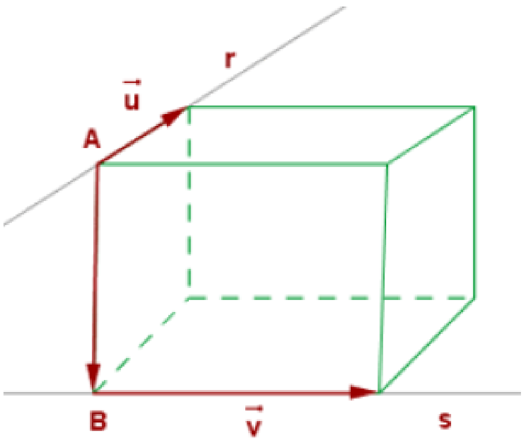


$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos sectas que se cruzan** se mide sobre la **perpendicular común**.

Sean $(A,\vec{u})$ y $(B,\vec{v})$ las determinaciones lineales de las rectas r y s.



Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan **paralelepípedo** cuya **altura** es la **distancia entre las dos rectas**.

El volumen de un paralelepípedo es $V = A_b \cdot h$.

Teniendo en cuenta el volumen es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores y el área de la base es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas, la altura, es decir, la distancia entre los dos puntos es igual a:

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

Ejemplo

Hallar la mínima **distancia entre las rectas**:

$$r \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y-10}{3} = \frac{z-6}{1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$A(-8,10,6) \qquad \vec{u} = (2,3,1)$

$\overrightarrow{AB} = (9,-9,-5)$

$B(1,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,4)$

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \left\| \begin{matrix} 9 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix} \right\| = 136$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A_b = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{10^2 - 9^2 + 7^2} = \sqrt{230}$$

$$h = \frac{136}{\sqrt{230}} = \frac{68\sqrt{230}}{115}$$