

VECTORES EN EL ESPACIO

Vectores linealmente independientes

Tres vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ son **linealmente independientes** si se cumple:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplo:

Indica si los vectores $\vec{u}(2,3,1)$, $\vec{v}(1,0,1)$ y $\vec{w}(0,3,-1)$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por lo que los vectores son linealmente dependientes.}$$

Ejemplo:

Determina los valores de k para que los vectores $\vec{u}(3, k, -6)$, $\vec{v}(-2, 1, k + 3)$ y $\vec{w}(1, k + 2, 4)$ sean linealmente dependientes.

Solución

Los tres vectores serán linealmente dependientes cuando se cumpla que:

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k + 3 \\ 1 & k + 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$12 + k^2 + 3k + 12k + 24 - (-6 - 8k + 3k^2 + 15k + 18) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

que se cumple para $k = 2$ y $k = 6$.

APLICACIÓN:**¿CÓMO SABER SI CUATRO PUNTOS ESTÁN EN EL MISMO PLANO?**

Cuatro puntos A, B, C y D están en el mismo plano si los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} son linealmente dependientes.

Ejemplo:

Sean los puntos A(1, 2, 1), B(2, 3, 1), C(0, 5, 3) y D(-1, 4, 3). Averigua si los cuatro puntos están en el mismo plano.

Solución:

Calculamos los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} :

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 3 - 2, 1 - 1) = (1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1, 5 - 2, 3 - 1) = (-1, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1 - 1, 4 - 2, 3 - 1) = (-2, 2, 2)$$

y vemos si son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 4 - (0 - 2 + 4) = 2 - 2 = 0$$

Por lo que los vectores son linealmente dependientes y por ello podemos decir que los cuatro puntos están en el mismo plano.

Producto escalar de vectores

El **producto escalar** de dos vectores es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u}(3, -1, 5)$ y $\vec{v}(4, 7, 11)$, calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Solución

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$$

Vectores ortogonales (perpendiculares)

Dos vectores \vec{u} y \vec{v} son **ortogonales** si su producto escalar es cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Cuando dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales se denota: $u \perp v$

Ejemplo:

Comprueba si los vectores $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, -2, -1)$ son ortogonales.

Solución

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 0) \cdot (1, -2, -1) = 4 \neq 0 \rightarrow \text{No son ortogonales.}$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{a}(2, -1, 4)$ y $\vec{b}(0, 3, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, halla los valores de λ para los que los vectores \vec{a} y \vec{b} son ortogonales.

Solución

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 4) \cdot (0, 3, \lambda) = -3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

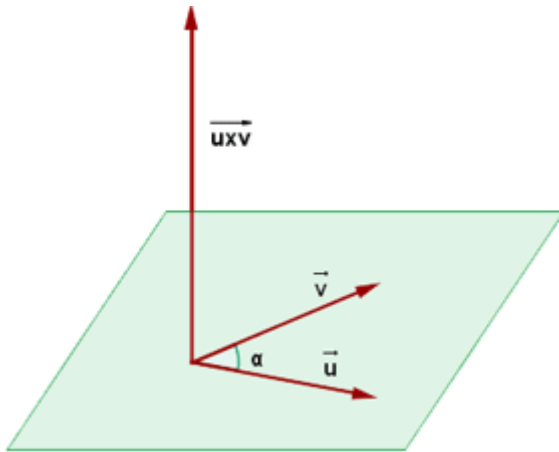
Producto vectorial de dos vectores

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v . Su **módulo** es igual a:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$$

El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$



Ejemplo:

Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto vectorial de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es ortogonal a \vec{u} y \vec{v} .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad (-2, -2, 4) \cdot (3, -1, 1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \quad (-2, -2, 4) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores \vec{u} y \vec{v} .