INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIA SI LA VARIANZA POBLACIONAL ES CONOCIDA

Supongamos que tenemos una variable aleatoria que sigue una distribución Normal N(μ; σ) donde la varianza es un valor fijo conocido.

El intervalo de confianza a nivel 1 – α para la media μ viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ejemplos:

(PAU) Sabemos que una variable estadística se comporta como una *N*(μ , 10). Para estimar μ extraemos una muestra de tamaño 100, cuya media resulta ser igual a 37. Estima μ mediante un intervalo de confianza del 90% y del 95%.

a) Los intervalos de confianza para la media tienen la forma: $IC = \left(\bar{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es tal que: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0{,}90 \Rightarrow P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

El intervalo pedido es: $\left(37 \mp 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (35{,}355;\ 38{,}645)$.

b) Si la confianza es del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

El intervalo de confianza es: $\left(37 \mp 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (35{,}04;\ 38{,}96)$.

(PAU) El peso de los alumnos de Bachillerato de cierta ciudad tiene una media desconocida y una desviación típica σ = 5,4 kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 alumnos de Bachillerato de esa ciudad. Si la media de la muestra es de 60 kg, calcula con un nivel de confianza del 99% el intervalo de confianza para el peso medio de todos los alumnos de Bachillerato de la ciudad.

A una confianza del 99% le corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$.

El intervalo pedido: $\left(60 \mp 2{,}575 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}\right) = (58{,}6095;\ 61{,}3905)$.

P2. Los estudiantes de Bachillerato de España duermen un número de horas diarias que se distribuye de forma normal con media μ desconocida y desviación σ=3. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral de 7 horas. Hallar un intervalo de confianza, al 96%, para la media de horas de sueño, μ.

Solución:

Sea X="horas de sueño" que sigue la distribución normal N(μ,σ=3). Con fin de estimar el valor de μ tomamos la muestra con n=30 y media $\bar{x}_{30}$=7 horas, que es un estimado puntual de μ.

La media de las muestras de tamaño n=30, $\bar{x}_{30}$ siguen un distribución normal: $N(\mu,\frac{3}{\sqrt{30}})=N(\mu,1.73)$. El error máximo cometido con μ y con intervalo de confianza del 96% (α=0,04) será E= $z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Para calcular $z_{\alpha/2}$ miramos la tabla de la distribución normal el valor que cumple $P(z\leq z_{\alpha/2})=1-\alpha/2=0.98 \rightarrow z_{\alpha/2}=2.06$, y por tanto el error máximo es $E=2.06\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}=1.1$.

Con los datos calculados antes se cumple entonces que $IC=(\bar{x}_{30}-E, \bar{x}_{30}+E)=(5.9, 8.1)$.