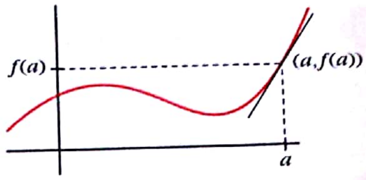
1.2 DERIVADA EN UN PUNTO POR PASO AL LÍMITE. FUNCIÓN DERIVADA

- Dada una función, $y = f(x)$, y un punto, $(a,\ f(a))$, se define la **derivada de $f(x)$ en $x = a$** como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si llamamos $x - a = \text{h}$, entonces la definición queda así:

$$f'(a) = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{f(a + \text{h}) - f(a)}{\text{h}}$$



- $f'(a)$ es la **pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y mide el **crecimiento de la función en ese punto.**

EJERCICIO RESUELTO

Halla, a partir de la definición, la derivada de cada una de estas funciones en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

RESOLUCIÓN

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1 + h)^2 - 1) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h^2 + 2h) - 1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 2h^2 + 4h - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2h + 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 4) = 4$$

Por tanto: $f'(1) = 4$

b) $$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{(1 + h) + 1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{h + 2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2 - h - 2}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h + 2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto: $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

1 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2 Halla, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = 2x - x^2$ en los puntos de abscisas 0 y –1.

3 Calcula, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en los puntos de abscisa 1 y 2.

4 Obtén, a partir de la definición, la derivada de la función $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en el punto (–1, 1).

5 Calcula, utilizando la definición de derivada, el valor de $f'(1)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x+1}{3}$.

6 Halla la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 3 - x^2$ en el punto (1, 2).

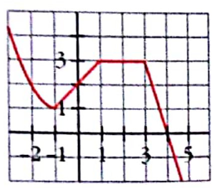
7 Dada la función $f(x) = x^2 - 1$:

a) Calcula T.V.M. [2, 2 + h].

b) Halla $\lim\limits_{h \to 0}$ (T.V.M. [2, 2 + h]).

c) ¿Qué relación hay entre este limite y $f'(2)$?

8 La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. A partir de ella, calcula las derivadas que se indican:



a) $f'(-1)$

b) $f'(2)$

c) $f'(4)$

9 Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$.

Función derivada:

Llamamos **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJERCICIO RESUELTO

a) Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

b) Calcula $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(1{,}5)$.

RESOLUCIÓN

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h + 1 - x^2 + 3x - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x - 3) = 2x - 3$

b) Como ya tenemos $f'(x)$, los resultados son inmediatos:

$f'(0) = -3$; $f'(-1) = -5$; $f'(2) = 1$; $f'(1{,}5) = 0$

10 Halla, a partir de la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 1$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{5}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{2}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

d) $f(x) = x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

e) $f(x) = x^2$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

f) $f(x) = 4$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

g) $f(x) = \dfrac{3}{2}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

h) $f(x) = 2x^2 - x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

k) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$