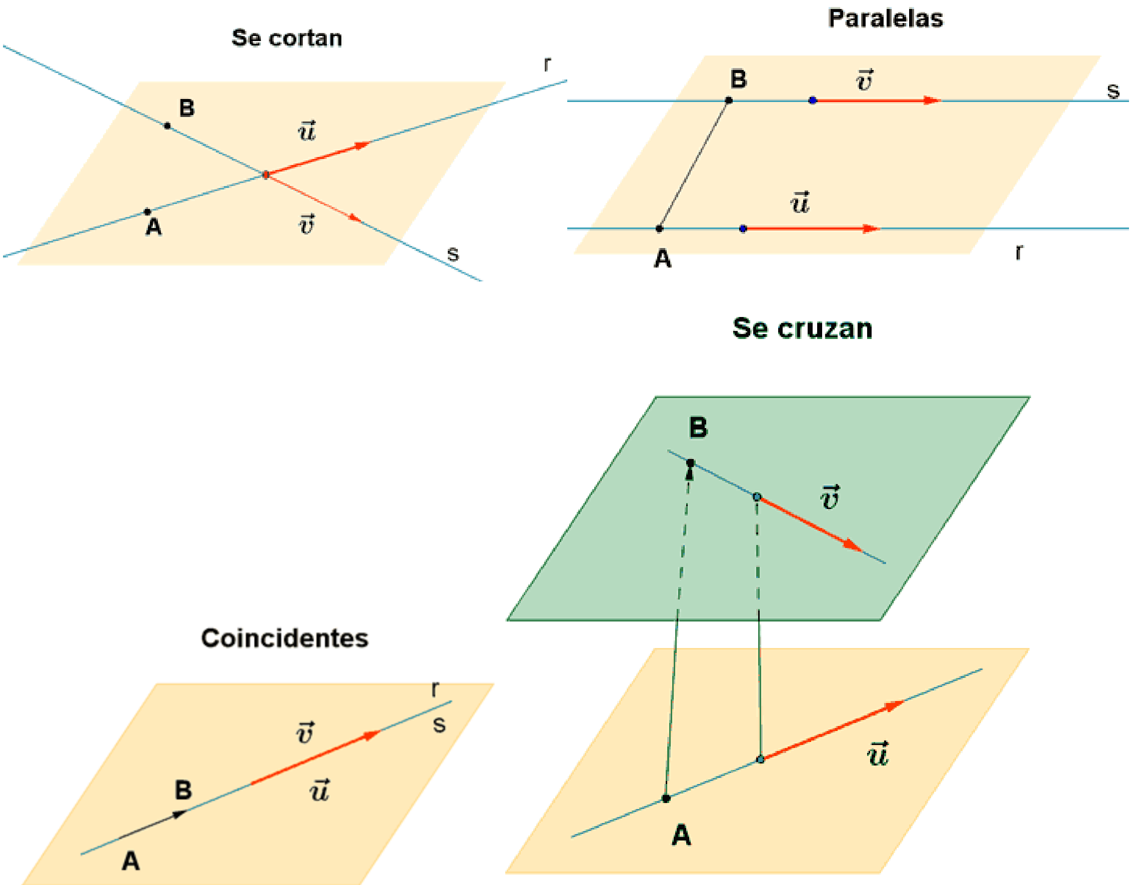
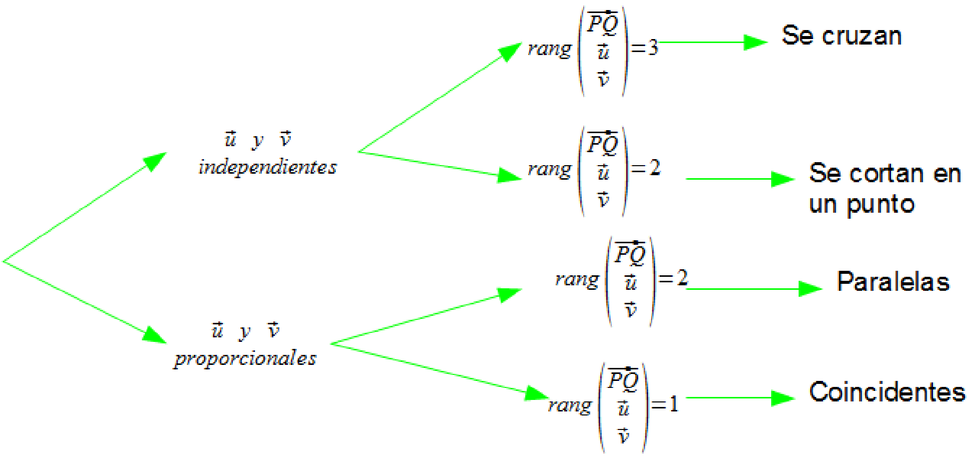
POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

La posición relativa de dos rectas en el espacio puede ser:



CÁLCULO DE LA POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Sea r la recta que pasa por el punto P y tiene a $\vec{u}$ como vector director y s la recta que pasa por el punto Q y tiene como vector director a $\vec{v}$. Podemos saber cuál es la posición relativa de ambas rectas utilizando el siguiente esquema:



Ejemplo:

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \qquad s \equiv (x,y,z) = (0,1,-1) + \mu(-2,6,2)$$

Solución:
La recta r pasa por el punto P(2,1,-1) y tiene como vector director a $\vec{u}(-1,3,1)$
La recta s pasa por el punto Q(0,1,-1) y tiene como vector director a $\vec{v}(-2,6,2)$

A simple vista se observa que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales ($\vec{v} = 2\,\vec{u}$)
Como además:

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, comprobamos que $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ = 2
De donde deducimos que ambas rectas son paralelas.

Ejemplo:

Determina la posición relativas de las rectas:

$$r : (x,y,z) = (4,3,5) + \lambda(3,0,-6)$$
$$s : (x,y,z) = (2,3,9) + \lambda(1,0,-2)$$

La recta r pasa por el punto P(4,3,5) y tiene como vector director a $\vec{u}(3,0,-6)$
La recta s pasa por el punto Q(2,3,9) y tiene como vector director a $\vec{v}(1,0,-2)$

A simple vista se observa que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales ($\vec{u} = 3\,\vec{v}$)
Como además:

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, comprobamos que todos los menores de orden 2 son nulos, por lo que rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ = 1
De donde deducimos que ambas rectas son coincidentes.

Ejemplo:

Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = z \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{z+3}{-1}$$

La recta r pasa por el punto P(-2,1,0) y tiene como vector director a $\vec{u}(3,2,1)$

La recta s pasa por el punto Q(3,-1,-3) y tiene como vector director a $\vec{v}(2,1,-1)$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son independientes y además $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, es decir rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ = 3, deducimos que ambas rectas se cruzan.