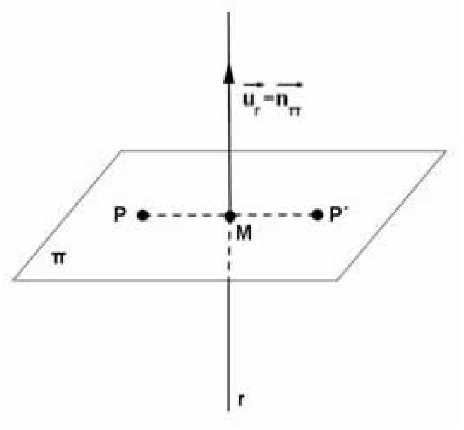
SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA

Los pasos para hallar un punto simétrico P´ de otro P respecto a una recta r son los siguientes:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>- Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r.
El vector normal de π es el director de la recta r por ser ⊥.
- Punto de corte de la recta r y el plano π.
Este punto se llama punto proyección M
M (Mx, My, Mz).
M es el punto medio entre P y su simétrico P´
$Mx = \frac{Px + P´x}{2}$ $My = \frac{Py + P´y}{2}$ $Mz = \frac{Pz + P´z}{2}$
- Coordenadas de P´
Hallamos las coordenadas de P´, despejando P´x, P´y, P´z de la expresión del punto medio.</td>
</tr>
</table>

Ejemplo:

Obtener las coordenadas del punto simétrico de $P(1, -3, 7)$ respecto de la recta

$r: x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{3}$

- Ecuación del plano que pasa por P y es ⊥ a r.

El vector director de la recta r es el vector normal del plano π $\rightarrow \vec{u_r} = \vec{n_\pi} = (1, 1, 3)$.

Ecuación normal del plano

$\vec{PX} \cdot \vec{n_\pi} = 0$

$(x - 1, y + 3, z - 7) \cdot (1, 1, 3) = 0$

$\pi : x + y + 3z - 19 = 0$

- Hallamos M, punto medio $\overline{PP'}$

Se llama punto proyección de P o pie de la perpendicular.

Ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

Sustituimos r en la ecuación del plano, operando y resolviendo obtenemos t.

$\pi : x + y + 3z - 19 = 0$

$(1+t) + (-3+t) + 3(4+3t) - 19 = 0$

$11t - 9 = 0 \rightarrow t = 9/11$

Coordenadas de M, sustituimos t en la recta r.

$M: \begin{cases} x = 1 + 9/11 \\ y = -3 + 9/11 \\ z = 4 + 3(9/11) \end{cases} \quad M: \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right)$

- Punto simétrico P´

Utilizamos la fórmula del punto medio.

$$M_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \rightarrow \frac{20}{11} = \frac{1 + P'_x}{2} \rightarrow P'_x = \frac{29}{11}$$

$$M_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \rightarrow \frac{-24}{11} = \frac{-3 + P'_y}{2} \rightarrow P'_y = \frac{-15}{11}$$

$$M_z = \frac{P_z + P'_z}{2} \rightarrow \frac{71}{11} = \frac{7 + P'_z}{2} \rightarrow P'_z = \frac{65}{11}$$

Coordenadas de P´ $\left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$