ECUACIONES DE UN PLANO

Importante

Para expresar la ecuación de un plano necesitamos **un punto** por el que pase y **dos vectores** que indiquen dos direcciones distintas de éste, es decir, dos vectores linealmente **independientes**.

Si el punto es $P=(x_0,y_0,z_0)$ y los vectores son $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$, las ecuaciones son:

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(u_1,u_2,u_3) + \mu(v_1,v_2,v_3)$

Ecuación paramétrica:
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ecuación Implícita: $Ax + By + Cz + D = 0$

Para conseguir la ecuación implícita o general, resolveremos el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

1). Hallar las ecuaciónes paramétricas y general del plano determinado por el punto $A(-1, 3, 0)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u} = (1, -2, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, -2)$. Halla dos puntos más del plano.

La ecuación paramétrica del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, \vec{u}_1 + \mu\, \vec{v}_1 \\ y = y_0 + \lambda\, \vec{u}_2 + \mu\, \vec{v}_2 \\ z = z_0 + \lambda\, \vec{u}_3 + \mu\, \vec{v}_3 \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = 3 - 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda - 2\mu \end{cases}$$

La ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \vec{u}_1 & \vec{v}_1 \\ y - y_0 & \vec{u}_2 & \vec{v}_2 \\ z - z_0 & \vec{u}_3 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y-3 & -2 & 1 \\ z-0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (x+1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} y-3 & 1 \\ z-0 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} y-3 & -2 \\ z-0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1)\cdot (5) - [(y-3)\cdot (-2) - z] + 2[(y-3)\cdot (-1) + 2z] = 5x + 5 - (-2y + 6 - z) + 2(-y + 3 + 2z) =$$

$$= 5x + 5 + 2y - 6 + z - 2y + 6 + 4z = 5x + 5z + 5 = 0$$

$\pi : 5x + 5z + 5 = 0$

Para hallar puntos nuevos damos valores a los parámetros de la ecuación paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = 3 - 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 0 + 2\cdot 1 = 1 \\ y = 3 - 2\cdot 0 + 1 = 4 \\ z = -0 - 2\cdot 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow B(1, 4, -2)$$

Otra forma de hallar nuevos puntos es dando valores a dos incógnitas de la ecuación general:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5\cdot 0 + 5z + 5 = 0 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(0, 0, -1)$$

ECUACIÓN DEL PLANO CUANDO CONOCEMOS TRES PUNTOS POR LOS QUE PASA

A partir de tres puntos no colineales del plano, podemos obtener la ecuación de la siguiente forma: Dejamos un punto fijo y obtenemos los dos vectores directores con origen el punto fijado y extremos los otros dos.

Si los puntos son P_0, P_1 y P_2 un punto del plano es P_0, y dos vectores directores $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_2}$. También podemos obtener el vector normal al plano $\vec{n}_{\Pi} = (A,B,C) = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

2). Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica y general del plano que pasa por los puntos $A\,(2,-1,1)$, $B\,(4,0,2)$ y $C\,(-3,1,-2)$.

Para poder obtener las ecuaciones del plano necesitamos un punto y dos vectores que sean linealmente independientes y estén contenidos en el plano. Formaremos por tanto:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,1,1) \quad \text{y} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-5,2,-3)$$

Ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (2,-1,1) + \lambda \cdot (2,1,1) + \mu \cdot (-5,2,-3)$$

$$(x,y,z) = (2,-1,1) + (2\lambda,\ \lambda,\ \lambda) + (-5\mu,\ 2\mu,\ -3\mu)$$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda - 5\mu \\ y = -1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$$

Ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -5 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z-1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot (x-2) - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot (y+1) + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (z-1) = 0$$

$$(-5)(x-2) - (-1)(y+1) + 9(z-1) = 0$$

$$-5x + y + 9z + 10 + 1 - 9 = 0$$

$$-5x + y + 9z + 2 = 0$$

ECUACIÓN DEL PLANO QUE CONTIENE A UN PUNTO Y A UNA RECTA

Para escribir la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes contenidos en el plano π. Tenemos un punto, el A. Uno de los vectores es el director de la recta. El otro podemos obtenerlo tomando un punto P de la recta y formando el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,0,1) y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Solución:

Necesitamos un punto por el que pase el plano y dos vectores linealmente independientes.

El punto por el que pasa puede ser A(2,0,1), uno de los vectores es el vector director de la recta $\vec{u}(2,1,-1)$. Para conseguir el segundo vector, buscaremos un punto P de la recta y formaremos el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$.

El punto P de la recta es P(1,-3,0), por lo que:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} = (1-2, -3-0, 0-1) = (-1, -3-1)$$

Luego ya tenemos la información que necesitamos:

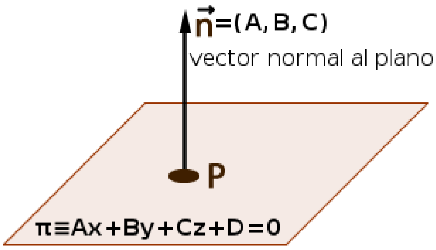
A(2,0,1) , $\vec{u}(2,1,-1)$ y $\vec{v}(-1,-3,-1)$ y podemos encontrar la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x-3y+5z-13=0$$

VECTOR NORMAL DE UN PLANO

Para hallar la ecuación del plano π que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}$=(a,b,c), utilizaremos la ecuación:

$ax + by + cz + d = 0$ *Ecuación general o implícita del plano*



Ejemplo

Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n} = (3, 2, 1)$ que pasa por el punto $P_0\,(1, 1, -1)$.

Las componentes de $\vec{n}$ nos indican los coeficientes a, b y c de la ecuación del plano:

$$\pi : \quad 3x + 2y + z + d = 0$$

¿Cómo hallamos d?

El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P_0 y obtenemos el coeficiente que faltaba:

$$3.1 + 2.1 - 1 + d = 0 \ \Rightarrow d = -4$$

Así obtenemos la ecuación del plano:

$$\pi : \quad 3x + 2y + z - 4 = 0$$

Ejemplo:

Considera el punto A(1, -2,1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}$. Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

Solución:

El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $(-1,1,1)$, luego, su ecuación será:

$$-x+y+z+D=0$$

y, como debe pasar por el punto $A=(1,-2,1)$, se debe cumplir:

$$-1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=2$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación:

$$-x+y+z+2=0$$