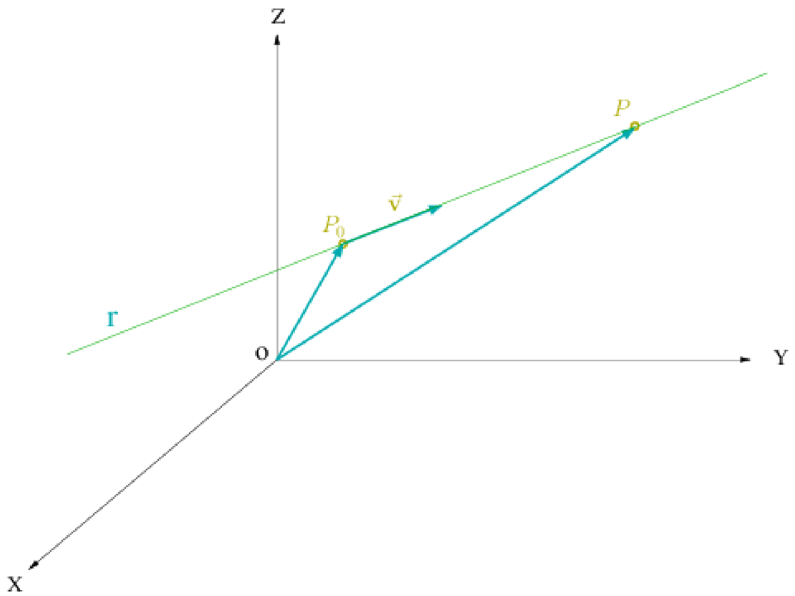
ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO

Al igual que ocurre en el plano, una **recta** en el espacio queda determinada conociendo un punto P y un vector no nulo $\vec{\mathbf{v}}$ que se llama vector director o direccional de la recta.



Ecuación en forma vectorial

La recta que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene por vector director $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ es el conjunto de puntos P del espacio que verifican la relacion

$$P = P_0 + \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

que se denomina ***ecuación vectorial*** de la recta.

Ecuación en forma paramétrica

Desarrollando la ecuación vectorial anterior expresada en coordenadas, tenemos lo siguiente:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) = (x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z)$$

Igualando componentes resulta:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}$$

Expresión que se denomina ecuación de la recta en ***forma paramétrica*** o ***ecuaciones paramétricas*** de la recta.

Ecuación en forma continua

Si, en las ecuaciones **paramétricas**, v_x, v_y y v_z son distintos de cero, se puede despejar en cada una de ellas el parametro λ

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_x}; \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{v_y}; \qquad \lambda = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Igualando las expresiones obtenidas resulta:

$$r : \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

que es la ecuación de la recta en ***forma continua.***

Ecuación en forma cartesiana o implícita (Recta como intersección de dos planos)

A partir de la ecuación forma continua de la recta podemos obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}$$

$$\frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

que se pueden reescribir de la forma:

$$r : \begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \\ a' \cdot x + b' \cdot y + c' \cdot z + d' = 0 \end{cases}$$

y que se conocen con el nombre ***de ecuación implícita*** o ***cartesiana*** de la recta. (Recta como intersección de dos planos)

Ejemplo:

Determinemos las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos:

$$P = (1, 2, 3) \qquad \mathbf{y} \qquad Q = (-1, -2, -3)$$

Un vector director de r es, por ejemplo, el vector que va desde el punto P hasta el punto Q

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, -2, -3) - (1, 2, 3) = (-2, -4, -6)$$

Por lo tanto, la ecuacion de la recta r en forma vectorial es:

$$(x, y, z) = P + \lambda \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) + \lambda(-2, -4, -6)$$

En forma paramétrica es:

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - 2\lambda \\ y & = & 2 - 4\lambda \\ z & = & 3 - 6\lambda \end{array} \right.$$

En forma continua es:

$$r : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{-6}$$

En forma implícita es:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x - y = 0 \\ 3 \cdot x - z = 0 \end{array} \right.$$