

2.5 LÍMITE EN UN PUNTO DEL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS $P(x)/Q(x)$

Al calcular $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$ podemos encontrarnos con uno de estos tres casos:

- Si $Q(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$.
- Si $P(c) \neq 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (hallamos los límites laterales).
- Si $P(c) = 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x-c)P_1(x)}{(x-c)Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

(Para hallar este nuevo límite, analizamos en cuál de los tres casos es encuentra).

EJERCICIO RESUELTO

Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$$

RESOLUCIÓN

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{3^2 + 1}{3^2 - 2 \cdot 3} = \frac{10}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{5}{0} = (\pm\infty). \text{ Hallamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 2)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{4}{3}$$

1 Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+2} = \quad b) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} = \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+3} = \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 2x} = \quad g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{3x^3 + x^2} =$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)^2} = \quad j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)^2} = \quad k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \quad l) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4} = \quad n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2 + 2x} = \quad ñ) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 = \quad o) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} =$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x - 10} = \quad q) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \quad r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \quad s) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + x - 2} =$$

EJERCICIO RESUELTO

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

Calcula los límites de esta función en los puntos que anulan su denominador. Representa gráficamente los resultados:

RESOLUCIÓN

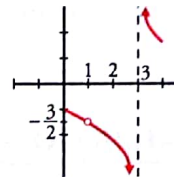
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0} = (\pm\infty)$$

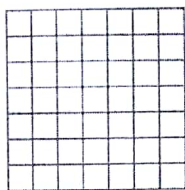
Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty$$

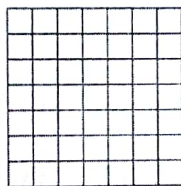


2 Calcula estos límites y representa gráficamente los resultados:

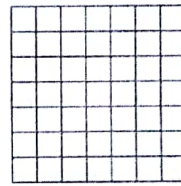
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$



b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$

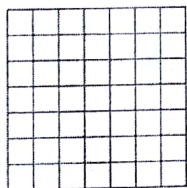


c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$

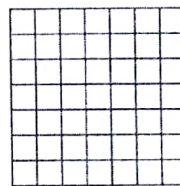


3 Calcula los límites en los puntos que se indican y representa los resultados:

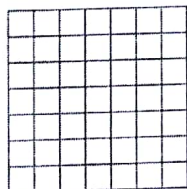
a) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$
en 0 y -3



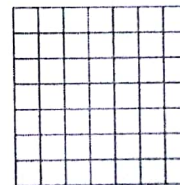
b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x - 6}$
en 0 y 3



c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 4x}$
en 0 y 2

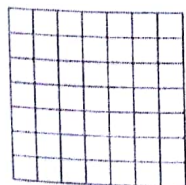


d) $f(x) = \frac{3x - 6}{(x+1)^2}$
en -1 y 2

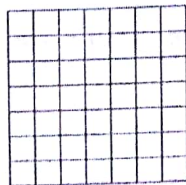


4 Halla el límite de las siguientes funciones en los puntos en los que no están definidas. Interpreta gráficamente los resultados:

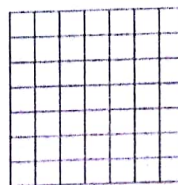
a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$



b) $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$



c) $f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 - 4x + 4}$



d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x}$

