## 2.4 CÁLCULO DEL LÍMITE EN UN PUNTO EN FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"

Si $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < c \\ f_2(x), & x \geq c \end{cases}$ con $f_1$ y $f_2$ funciones continuas, para hallar el límite en un punto, hacemos lo siguiente:

- **En el punto de ruptura** (en $x = c$):
  Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f_1(c)$; $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f_2(c)$.
  Si coinciden, este es el valor de $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Si no coinciden, el límite en $x = c$ no existe.
- **En otro punto cualquiera del dominio** (en $x = a$, con $a \neq c$):
  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_1(a)$ si $a < c$ ; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_2(a)$ si $a > c$

### EJERCICIO RESUELTO

***Dada la función*** $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 6 & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ***halla los límites de*** $f(x)$ ***en*** $-1$, $0$ ***y*** $4$.

**RESOLUCIÓN**

- En $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} (2x - 3) = -5 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (x^2 - 6) = -5 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 6) = -6 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + 3) = 3 \end{aligned}\right\} \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x).$$

- En $x = 4$: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x} + 3) = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$

**1** Halla los límites de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en los puntos $-1$, $1$ y $2$.

**2** Halla el límite cuando $x \to 2$ en cada una de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 9 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

**3** a) Halla el valor de $k$ para que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x + k & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

b) Representa la función anterior para el valor de $k$ que has obtenido.