Ejercicios resueltos sobre factorización de polinomios

Ejercicio 1. Factoriza el siguiente polinomio: $5x^2 + 5x - 60$

Solución:

El polinomio $5x^2 + 5x - 60$ tiene dos raíces: $x_1 = 3,\ x_2 = -4$, que se obtienen de resolver la ecuación de segundo grado $5x^2 + 5x - 60 = 0$.
Entonces:

$$5x^2 + 5x - 60 = 5(x-3)(x+4)$$

Ejercicio 2. Factoriza el siguiente polinomio: $5x^3 + 5x^2 - 60x$

Solución:

El polinomio incompleto de grado 3, $5x^3 + 5x^2 - 60x$, se puede descomponer de la siguiente manera:

$$5x^3 + 5x^2 - 60x = x(5x^2 + 5x - 60) = 5x(x-3)(x+4)$$

(Observa que primero hemos sacado factor común x y luego hemos factorizado el polinomio de grado 2, como hicimos en el ejemplo anterior).

Ejercicio 3. Factoriza el siguiente polinomio: $P(x) = x^4 - 7x^2 + 6$

Solución:

Resolvemos la ecuación bicuadrada: $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

$$x^4 - 7x^2 + 6 = 0 \rightarrow \left\{x^2 = y\right\} \rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ y = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Soluciones: $-1,\ 1,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6}$

Entonces, la factorización del polinomio es la siguiente:

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$$

Ejercicio 4. Factoriza el siguiente polinomio:

$$P(x) = 3x^6 - 3x^5 - 117x^4 + 327x^3 - 210x^2$$

Solución

Primero sacamos factor común $3x^2$:

$$P(x) = 3x^6 - 3x^5 - 117x^4 + 327x^3 - 210x^2 = 3x^2(x^4 - x^3 - 39x^2 + 109x - 70)$$

Ahora aplicamos Ruffini. Los divisores de 70 son $1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 5,\ -5,\ \text{etc.}$

Empezaremos probando con el 1:

```
   | 1   -1   -39   109   -70
   |
  1|      1     0   -39    70
 --|----------------------
   | 1    0   -39    70   |0
                          |____
```

Como el resto es cero, hemos encontrado una de las raíces, $x = 1$ y uno de los factores $(x-1)$.

$$P(x) = 3x^6 - 3x^5 - 117x^4 + 327x^3 - 210x^2 =$$
$$= 3x^2(x^4 - x^3 - 39x^2 + 109x - 70 =$$
$$= 3x^2(x-1)(x^3 - 39x + 70)$$

Seguimos aplicando Ruffini. Probamos con 1, de nuevo ya que podría repetirse dicha raíz:

```
   | 1    0   -39    70
   |
  1|      1     1    38
 --|-----------------
   | 1    1    38  |108
                   |____
```

El resto es diferente de cero con lo que tenemos que seguir probando, con el -1:

```
    | 1    0   -39    70
    |
 -1 |     -1     1    38
 --|-----------------
    | 1   -1   -38  |108
                    |____
```

El resto vuelve a ser diferente de cero, probamos con 2:

```
    | 1   0   -39    70
    |
  2 |     2     4   -70
 --|----------------
    | 1   2   -35    |0
                     |____
```

Ya hemos encontrado otra raíz, $x = 2$, y el factor correspondiente, (x-2)

El polinomio quedará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^6 - 3x^5 - 117x^4 + 327x^3 - 210x^2 = \\ &= 3x^2(x^4 - x^3 - 39x^2 + 109x - 70 = \\ &= 3x^2(x-1)(x^3 - 39x + 70) \\ &= 3x^2(x-1)(x-2)(x^2 + 2x - 35) \end{aligned}$$

Finalmente para encontrar las dos últimas raíces utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-35)}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Así, sus raíces son 5 y -7 y sus factores (x-5) y (x+7).

De esta manera:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^6 - 3x^5 - 117x^4 + 327x^3 - 210x^2 = \\ &= 3x^2(x^4 - x^3 - 39x^2 + 109x - 70 = \\ &= 3x^2(x-1)(x^3 - 39x + 70) \\ &= 3x^2(x-1)(x-2)(x^2 + 2x - 35) \\ &= 3x^2(x-1)(x-2)(x-5)(x+7) \end{aligned}$$

Con lo que queda descompuesto el polinomio.

Ejercicio 5. Factoriza el siguiente polinomio:

$$p(x) = x^3 - 1$$

Solución

Para factorizar ese polinomio puedes aplicar la regla de Ruffini o resolver la ecuación asociada $x^3 - 1 = 0$.

Si aplicas Ruffini:

...|..1 ..... 0 ..... 0 .....-1
1|.......... 1 ...... 1 1

.....1..... 1 ...... 1 0

La primera raíz es 1. Lo cual nos deja el monomio (x-1) como una parte de la factorización. Los coeficientes arrojados en la aplicación del método de Ruffini (1 ... 1 ... 1) nos dicen que el polinomio que multiplica a nuestro monomio es $x^2 + x + 1$. Por lo cual se tiene:

(x - 1)($x^2 + x + 1$)

Al tratar de buscar las raíces de este segundo polinomio tenemos que resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Si aplicamos la fórmula obtenemos: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, por lo que no hay más raíces reales.

La factorización en números reales queda:

(x - 1)($x^2 + x + 1$)