RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}$

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios.
Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:

1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.
2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.
3. Numerador y denominador quedan «en tablas» (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.

Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, x^n tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.

Ejemplo A.1
Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3+1}{2x^3+x}$

Comenzamos por aplicar las reglas del cálculo de límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3+1}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Vemos, pues, que se trata de un límite indeterminado de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito. En este caso, entre todas las potencias de x que aparecen la mayor es x^3. Dividiendo numerador y denominador por x^3, se obtiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2}}$$

Ahora bien, los términos $\frac{1}{x^2}$ y $\frac{1}{x^3}$ son del tipo $\frac{k}{\infty}$, luego convergen a cero cuando $x \to +\infty$. Es decir,

$$\lim_{x \to +\infty} 4 + \frac{1}{x^3} = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

Luego finalmente se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo A.2
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito, que en este caso es x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1+2\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{0-0}{1+0+0} = 0$$

Como ya se percibe en estos ejemplos, en realidad, en este tipo de límites (límites en $+\infty$ o en $-\infty$ de cocientes de polinomios y/o de raíces de polinomios), los únicos términos que juegan algún papel son los términos dominantes (los de mayor grado) del numerador y del denominador. De hecho, la regla siguiente simplifica mucho su cálculo.

Regla para el caso de límites, en $+\infty$ o en $-\infty$, de cocientes de polinomios
Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que el término de mayor grado de $p(x)$ es ax^m y el término de mayor grado de $q(x)$ es bx^n, entonces se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^m}{bx^n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^m}{bx^n}$$

Ejemplo A.3
Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5-3x^3+x^2-x+4}{x^4+x^3-5}$

Vemos que es un límite, cuando $x\to-\infty$, de un cociente de dos polinomios. En consecuencia aplicamos la regla anterior:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-3x^3+x^2-x+4}{x^4+x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty.$$

Ejemplo A.4
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt[3]{x+1}+2x}$

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Observamos los términos que aparecen:
• en el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x \to +\infty$ es como $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$, y x^2.
• en el denominador aparecen $\sqrt[3]{x+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.

Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:
• cuando $x \to +\infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.
• cuando $x \to +\infty$ el denominador se comporta como $2x$.
En consecuencia se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt[3]{x+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Ejemplo A.5
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Es de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ así que razonamos como antes.

El numerador, en el límite, se comporta como $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2}$, mientras que el denominador se comporta como $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{1/2}$.
En consecuencia, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Indeterminaciones de tipo $\infty - \infty$ con raíces cuadradas
La idea en los casos en que se tiene una diferencia de raíces es multiplicar y dividir por la suma de las raíces (lo que se suele llamar el conjugado). De este modo la indeterminación se transformará en una del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo A.6
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)$

Como vemos se trata de una indeterminación de tipo $+\infty-(+\infty)$. A fin del eliminar las raíces cuadradas, lo que hacemos es multiplicar y dividir por la suma de raíces, es decir por $x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}$. Se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)\left(x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}\right)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\dots$$

Ahora usamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados ($(a+b)(a-b)=a^2-b^2$) con lo que desaparece la diferencia de raíces:

$$\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{((x\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x^3+1})^2)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x+2)-(x^3+1)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}$$

De esta forma hemos llegado a un límite del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que puede ser resuelto como anterioremente.
Analizamos los términos dominantes: cuando $x\to+\infty$,

- el numerador se comporta como $2x^2$
- el denominador se comporta como $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=2x\sqrt{x}$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Ejemplo A.7
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4+1}}{x+2}$

En el numerador aparece una indeterminación de tipo $\infty-\infty$. Razonando como antes para eliminar la diferencia de raíces cuadradas, multiplicamos numerador y denominador por $x^2+\sqrt{x^4+1}$. Usando que suma por diferencia es diferencia de cuadrados, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^4+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-\sqrt{x^4+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-(x^4+1)}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=\frac{-1}{\infty}=0$$

Indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ que son cociente de polinomios

Lo que sucede en estos casos es que ambos polinomios tienen una raíz común. Lo que hay que hacer es factorizar el numerador y el denominador y simplificar.

Ejemplo A.8

Calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

Comenzamos, de nuevo, por aplicar las reglas de cálculo de límites, sustituyendo x por 2 en el cociente de polinomios:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \frac{2^3-2^2-4\cdot 2+4}{2^2-2-2} = \frac{8-4-8+4}{4-2-2} = \frac{0}{0}$$

Vemos por tanto que se trata de una indeterminación (2 es raíz tanto del numerador como del denominador). Para resolverla lo que hacemos es dividir el numerador y el denominador por $x-2$ (2 porque es el número que anula el numerador y el denominador). Vamos a hacer estas divisiones por la regla de Ruffini.

La división del numerador da

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & |\ 0 \end{array}$$

lo que implica (usando la fórmula de la división, dividendo igual a cociente por divisor más el resto)

$$x^3-x^2-4x+4 = (x-2)(x^2+x-2)+0 = (x-2)(x^2+x-2).$$

Análogamente, se tiene para el divisor

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & |\ 0 \end{array}$$

que como antes prueba

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1).$$

Sustituyendo, se tiene por tanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{2^2+2-2}{2+1} = \frac{4}{3}.$$

Ejemplo A.9
Calcular $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$

De nuevo es un cociente de polinomios que produce una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Razonamos como antes. Dividiendo el numerador por $x+1 = x-(-1)$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & |\,0 \end{array}$$

Tenemos por tanto

$$x^3+x^2-x-1 = (x+1)(x^2-1).$$

Dividiendo el denominador por $x+1$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & |\,0 \end{array}$$

lo que da

$$x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2).$$

Se tiene por tanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)^2-(-1)-2} = \frac{0}{0}.$$

Por tanto sigue siendo indeterminado. Volvemos a aplicar el método anterior.
Para descomponer el numerador podemos dividir por Ruffini por $x+1$ como anteriormente o simplemente usar que diferencia de cuadrados es suma por diferencia lo que da

$$x^2-1 = x^2-1^2 = (x+1)(x-1).$$

Para el denominador, dividiendo por Ruffini por $x+1$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & |\,0 \end{array}$$

lo que prueba

$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2).$$

Se tiene por tanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$