Polinomios. Suma y resta de polinomios

Observa

Para restar dos polinomios, puedes sumarle al primero el opuesto del segundo.

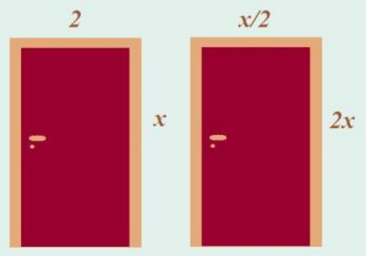
Actividades

1. Indica el grado de los siguientes polinomios:
   a) $4x^2y-3y^2$
   b) $-14t^2+t^3yz^2-z^4$
   c) $x^8-x^{10}+6$
   d) $2xy^2+3x^2y-6x^2y^2$

2. Calcula, para $x=1$, $x=-2$ y $x=3$, el valor numérico del polinomio:

$$p(x)=x^3-5x^2+8x-4$$

3. Expresa mediante un polinomio el perímetro y el área de cada puerta, incluyendo el marco:



4. Dados los polinomios:

$$p(x)=2x^4-3x^3+2x^2-8$$
$$q(x)=5x^4-3x^2+7$$
$$r(x)=8x^3+6x^2-x-5$$

calcula:
a) $p(x)+q(x)$ c) $p(x)-r(x)$
b) $q(x)+r(x)$ d) $r(x)-p(x)$
e) $p(x)+q(x)+r(x)$
f) $p(x)-q(x)-r(x)$

*Llamamos **polinomio** a una expresión algebraica formada por la suma o resta de varios monomios.*

- Si el polinomio está formado por dos monomios se denomina **binomio**; si lo forman tres monomios, **trinomio**; y así sucesivamente.
- El **grado** de un polinomio se corresponde con el mayor de los grados de los monomios que lo forman, una vez simplificado.
- El **valor numérico** de un polinomio se obtiene sustituyendo las letras que en él aparecen por sus valores concretos.

Indica el grado del polinomio $p(x,y)=-4x^3y+x$. Calcula su valor numérico para $x=-3$ e $y=1$.

El grado del polinomio es igual a 4 pues es el grado del primer monomio y es mayor que el grado del segundo monomio, que es 1.

$$p(-3,1)=-4\cdot(-3)^3\cdot 1+(-3)=105$$

Suma y resta de polinomios.

*Para **sumar o restar dos polinomios,** se agrupan los términos semejantes y se reduce el polinomio resultante.*

Dados los polinomios $p(x)=-x^2+\frac{3}{2}x-6$ y $q(x)=3x^2-\frac{x}{2}$, calcula $p(x)+q(x)$ y $p(x)-q(x)$:

Igual que en la suma y resta aritméticas, la suma y resta de polinomios puede efectuarse de las siguientes dos formas:

$$p(x)+q(x)=\left(-x^2+\frac{3}{2}x-6\right)+\left(3x^2-\frac{x}{2}\right)$$
$$=-x^2+3x^2+\frac{3}{2}x-\frac{x}{2}-6=2x^2+x-6$$
$$p(x)-q(x)=\left(-x^2+\frac{3}{2}x-6\right)-\left(3x^2-\frac{x}{2}\right)$$
$$=-x^2-3x^2+\frac{3}{2}x+\frac{x}{2}-6=-4x^2+2x-6$$

$p(x)+q(x)$	$p(x)-q(x)$
$\begin{array}{rrrr} & -x^2 & +\frac{3}{2}x & -6 \\ + & 3x^2 & -\frac{x}{2} & \\ \hline & 2x^2 & +x & -6 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr} & -x^2 & +\frac{3}{2}x & -6 \\ + & -3x^2 & +\frac{x}{2} & \\ \hline & -4x^2 & +2x & -6 \end{array}$

Multiplicación de polinomios. Identidades notables

Actividades

1. Dados los polinomios:

$$p(x) = 3x^4 - 2x - 8$$
$$q(x) = -5x^3 + 8x^2 - x + 2$$
$$r(x) = x^4 + 2x^3 - \frac{5x}{7} - 6$$
$$s(x) = 2x^4 - x^3 - \frac{9x^2}{4} - 3x$$

realiza las operaciones indicadas:

a) $p(x) - s(x) + 2q(x)$
b) $q(x) \cdot r(x)$
c) $3s(x) - 2r(x) - p(x)$
d) $r(x)(p(x) - q(x))$

2. Expresa mediante un polinomio el área de los siguientes rectángulos:

3. Desarrolla:

a) $(-8x^3 + 2 - 5)^2$
b) $(-2x - 2y)^2$
c) $\left[\left(\frac{3x}{2} + 4\right)\left(\frac{3x}{2} - 4\right)\right]^2$

4. Expresa los siguientes polinomios como una identidad notable:

a) $-x^4 + \frac{4}{25}y^2$
b) $9 + 16a^2 + 24a$
c) $49 + \frac{x^2}{4} - 7x$

5. Expresa el área de la foto con marco y sin él mediante un polinomio:

*Para **multiplicar** dos **polinomios** se efectúa el producto de cada término de uno de los polinomios por todos los términos del otro y se agrupan los resultados.*

Multiplica los polinomios $p(x) = x^2 - 3x$ *y* $q(x) = 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$.

Al igual que en la suma y resta, la multiplicación de polinomios puede realizarse de manera horizontal o vertical.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (x^2 - 3) \cdot \left(2x^2 + \frac{x}{2} - 3\right) \\ &= 2x^4 + \frac{x^3}{2} - 3x^2 - 6x^2 - \frac{3x}{2} + 9 \\ &= 2x^4 + \frac{x^3}{2} - 9x^2 - \frac{3x}{2} + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2x^2 & +\frac{x}{2} & -3 \\ & & \times & & x^2 & -3 \\ \hline & & & -6x^2 & \frac{-3}{2}x & +9 \\ + & 2x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & -3x^2 & & \\ \hline & 2x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & -9x^2 & \frac{-3}{2}x & +9 \end{array}$$

Identidades notables.

- ***Cuadrado de la suma de un binomio:***
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
- ***Cuadrado de la diferencia de un binomio:***
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
- ***Suma de un binomio por su diferencia:***
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- $(3x^2 + y)^2 = (3x^2)^2 + y^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot y = 9x^4 + y^2 + 6x^2y$
- $(3x^2 - y)^2 = (3x^2)^2 + y^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot y = 9x^4 + y^2 - 6x^2y$
- $(3x^2 + y)(3x^2 - y) = (3x^2)^2 - y^2 = 9x^4 - y^2$

División de polinomios

Para dividir polinomios procedemos de manera muy similar a la división de números naturales, cumpliéndose la regla de la división:

$$\boldsymbol{Dividendo\ =\ divisor \cdot cociente + resto}$$

Divide el polinomio $p(x) = -8x^4 + 22x^2 - 14x + 12$ entre el polinomio $q(x) = 4x^2 - 2x + 2$:

- Para ello, en primer lugar, dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el de mayor grado del divisor, es decir:
$$-8x^4 : 4x^2 = -2x^2$$
- A continuación, lo multiplicamos por cada término del divisor y lo restamos al dividendo.
- Vamos repitiendo el proceso hasta que obtengamos un polinomio de grado menor que el divisor, que será el resto de nuestra división.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
-8x^4 & & +22x^2 & -15x & +16 & 4x^2 & -2x & +2 \\
8x^4 & -4x^3 & +\ 4x^2 & & & & & \\ \cline{1-5}\cline{6-8}
 & -4x^3 & +26x^2 & -15x & +16 & -2x^2 & -x & +6 \\
 & 4x^3 & -\ 2x^2 & +\,2x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 24x^2 & -13x & +16 & & & \\
 & & -24x^2 & +12x & -12 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -\,x & +\,4 & & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que el cociente es $c(x) = -2x^2 - x + 6$ y el resto $r(x) = -x - 4$.

Si realizamos la prueba de la división observamos que el resultado es correcto:

$$\begin{aligned}
&-8x^4 + 22x^2 - 15x + 16 \\
&= (-2x^2 - x + 6)(4x^2 - 2x + 2) + (-x + 4) \\
&= -8x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x^3 + 2x^2 - 2x \\
&+ 24x^2 - 12x + 12 - x + 4 \\
&= -8x^4 + 22x^2 - 15x + 16
\end{aligned}$$

Actividades

1. Realiza las siguientes divisiones:
   a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) : (x^2 + x - 6)$
   b) $(2x^5 + 2x^3 + 2x) : (x^2 - 1)$
   c) $(x^6 - 3x^4 + 4x^3 + 6x + 2) : (x^3 + 2x^2 - 3)$
   d) $(x^5 + 3x^2 - x + 14) : (x^2 + 1)$
   e) $(-4x^4 - 5) : (2x^2 - x + 5)$

Regla de Ruffini. Teoremas del resto y del factor

Si tenemos una división entre un polinomio y un binomio de la forma $x - a$, donde a es un número entero, podremos realizar la división como se ha explicado en el apartado anterior. Sin embargo, es más sencillo y rápido resolverla con la **regla de Ruffini**.

1. Se escriben los coeficientes del dividendo en una línea horizontal. A la izquierda colocamos el valor de a.
2. Bajamos el coeficiente que está más a la izquierda, lo multiplicamos por a y el resultado lo ponemos debajo del siguiente coeficiente.
3. Sumamos ese segundo coeficiente con el valor que hemos escrito debajo, escribiendo el resultado en otra fila inferior.
4. Vamos repitiendo los pasos 2 y 3 hasta finalizar con el último coeficiente.

Calcula, aplicando la regla de Ruffini, $(3x^3 + x^2 + 2):(x - 2)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & \downarrow & 6 & 14 & 28 \\ \hline & 3 & 7 & 14 & 30 \end{array}$$

Por tanto, $(3x^3 + x^2 + 2):(x - 2) = 3x^2 + 7x + 14$ y el resto es $r = 30$.

Teorema del resto.

Si dividimos el polinomio $p(x)$ entre $x - a$, entonces el resto de la división es igual al valor numérico de $p(x)$ cuando $x = a$.

Si la división del polinomio $p(x) = -x^3 + x^2 - kx + 4$ entre $x - 2$ tiene resto 1, calcula el valor de k.

Por el teorema del resto, este es igual al valor numérico de $p(2)$. Por tanto, $p(2) = -2^3 + 2^2 - k \cdot 2 + 6 = 1$ y, despejando, $k = 1$.

Teorema del factor.

El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$.

Comprueba si $x + 1$ es un factor de $2x^4 + 3x^3 - 5x - 4$.

Vamos a calcular el valor numérico del polinomio dado para $x = -1$:

$$p(-4) = 2 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1) - 4 = 0$$

Por tanto, por el teorema del factor podemos afirmar que $x + 1$ es un factor del polinomio del enunciado.

Actividades

1. Calcula aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^4 - x + 6):(x - 1)$
b) $(x^4 + 3x^3 - x^2 + 5):(x + 3)$
c) $(x^4 - 1):(x + 1)$

2. Halla el resto de las divisiones del ejercicio anterior pero, esta vez, aplicando el teorema del resto.

3. ¿Qué valor debe tomar k para que el polinomio

$$p(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 4$$

sea divisible por $x - 2$?

4. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) $x - 3$ es factor de: $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$
b) $x + 2$ es factor de: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

Factorización

Observa

Las posibles raíces de un polinomio son los divisores del término independiente de un polinomio. Por tanto, podemos aplicar Ruffini para comprobar si estos divisores son o no raíces del polinomio dado.

Actividades

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^3 - 8x^2 - x + 2$

b) $3x^2 - 12x$

c) $25xy^2 + 30x^3y + 20x$

d) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{5x-5}{x^2-x}$

b) $\frac{x^2-4x}{x^2+4x}$

c) $\frac{x^2+10x+25}{x-5}$

d) $\frac{-6x^3+36x^2-54x}{2x^3-18x}$

***Factorizar** un **polinomio** consiste en descomponerlo en producto de dos o más polinomios de grado menor.*

Para realizar la factorización de un polinomio podemos utilizar diversas técnicas, como la regla de Ruffini, las identidades notales o extraer factor común.

Factoriza el polinomio $x^3 + 6x^2 - 8x - 16$.

En primer lugar, aplicamos la regla de Ruffini para encontrar una raíz entera de entre las posibles:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & -8 & -16 \\ 1 & & 1 & 7 & -1 \\ \hline & 1 & 7 & -1 & -17 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & -8 & -16 \\ 2 & & 2 & 16 & 16 \\ \hline & 1 & 8 & 8 & 0 \end{array}$$

Por lo que 1 no es raíz pero 2 sí lo es. Podemos, por tanto, factorizar como sigue:

$$x^3 + 6x^2 - 8x - 16 = (x-2)(x^2 + 8x + 8)$$

Debido a que x^2+8x+8 no tiene más raíces.

Factoriza el polinomio $p(x) = 4x^4 - 256x^2$.

En primer lugar, observamos que $4x^2$ es un factor común, por lo que se tiene:

$$p(x) = 4x^4 - 256x^2 = 4x^2(x^2 - 64)$$

Aplicando ahora las identidades notables tenemos:

$$p(x) = 4x^2(x+8)(x-8)$$

Fracciones algebraicas.

Una de las aplicaciones útiles de la factorización es la simplificación de fracciones algebraicas. Veamos a continuación dos ejemplos aplicando las técnicas vistas hasta ahora:

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $$\frac{x^3-2x^2+x}{2x^4-2x^3} = \frac{x(x^2-2x+1)}{2x^3(x-1)} = \frac{x(x-1)^2}{2x^3(x-1)} = \frac{x-1}{2x^2}$$

Sacamos factor común — *Aplicamos las identidades notables* — *Simplificamos*

b) $$\frac{x^2-2x}{x} : \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{x(x-2)}{x} : \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$= (x-2):(x-2) = 1$$