Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica que se obtiene al sumar dos o más monomios.

A cada monomio se le llama **término** del polinomio.

Si tiene dos términos se llama **binomio**; si tiene tres **trinomio**; si tiene cuatro **cuatrinomio** etc.

Los polinomios se nombran con letras mayúsculas, seguidas de unos paréntesis que contienen las letras de la parte literal, separadas por comas: P(x), Q(x,y), ...

Valor numérico de un polinomio

Si en un polinomio se sustituyen las letras por números y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el **valor númerico** del polinomio para los valores de las letras dados.

Ejemplo:

Halla el valor numérico del polinomio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 8x - 10$ cuando $x = 1$

$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 10 = 5$

Ejercicio 1:

Calcula el **valor numérico** del polinomio P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para $x=1$

b) $P(x)=x^3+1$, para $x=-1$

c) $P(x)=x^2+x+2$, para $x=2$

d) $P(x)= -x^2-x-2$, para $x= -2$

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** -4)*

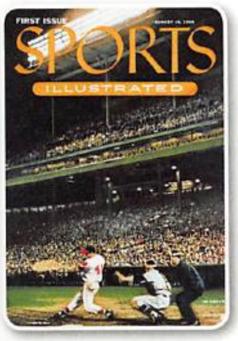
Ejemplos de la Vida Real

2. NEGOCIOS

El número de personas que compran una revista está relacionado con la inversión económica que se hace en publicitarla mediante la siguiente expresión:

$$n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$$

donde n es el número de personas que compran la revista y a es el dinero que la empresa dedica a hacer publicidad de la misma (en dólares). Si una empresa dedica $1500 en hacer publicidad de si revista, ¿cuántas personas la comprarán?



Real-World Link

Created in 1954, *Sports Illustrated* is read by over 23 million adults each week.

Source: *Sports Illustrated*

Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes de ambos

Ejemplo:

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x) = 5x^3 + 2x^2 + 5$

b) $(3x^2 - 2x + 5) - (x^2 + 2x) = 2x^2 - 4x + 5$

2. Dados los polinomios:

   $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ $\quad$ $Q(x) = -5x^2 + 2x$ $\quad$ $R(x) = x^3 + x^2 + 2$

   Calcula:

   a) P(x) + q(x) $\quad$ b) Q(x) – r(x)

3. Calcula y simplifica:

   $(x^2 - 5x + 1) - (3x - 1) + (2x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 2x - 5)$

   Sol: $-x^3 + 3x^2 - 7x + 6$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados.

Ejemplo:

$$(3x^2 - 2x + 5) \cdot 2x^2 = 6x^4 - 4x^3 + 10x^2$$

4. Sean $P(x) = x^2 - 4x + 2$ y $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 5$. Calcular:

   a) -2P(x) $\quad$ b) 4Q(x) $\quad$ c) 3P(x) - 2Q(x)

   Sol: a) $-2x^2 + 8x - 4$ b) $8x^3 + 4x^2 + 20$ c) $-4x^3 + x^2 - 12x - 4$

5. Hallar los siguientes productos:

   a) $(-2x^2)(x^5 - 4x^2 + 3x + 1)$ $\quad$ b) $(x^2 - 1)(5x^5)$ $\quad$ c) $(-3x^3)(2x^4 - 3x^3 + 2x - x + 3)$

   Sol:
   a) $-2x^7 + 8x^4 - 6x^3 - 2x^2$ b) $5x^7 - 5x^5$ $\quad$ c) $-6x^7 + 9x^6 - 6x^4 + 3x^4 - 9x^3$

Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de sus factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Ejemplo:

$$(2x^3-3x^2+1)\cdot(2x-3)=4x^4-6x^3-6x^3+9x^2+2x-3=4x^4-12x^3+9x^2+2x-3$$

6. Calcula p(x)·q(x) en los siguientes apartados:

   a) $P(x) = 5x^2 + 3x - 1$ y $Q(x) = x + 2$
   Sol: $5x^3 + 13x^2 + 5x - 2$

   b) $P(x) = x^3 + 1$ y $Q(x) = x^2 + x + 1$
   Sol: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   c) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 1$
   Sol: $x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1$

   d) $P(x) = - x^3 + 4x - 3$ y $Q(x) = x^2 + 3x + 4$
   Sol: $- x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 7x - 12$

División de polinomios

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline \quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\ \quad 5x^3 + 15x^2 - 10x & \\ \hline \qquad 6x^2 + 20x - 20 & \\ \qquad -6x^2 - 18x + 12 & \\ \hline \qquad\quad 2x - 8 & \end{array}$$

7. Realiza las siguientes divisiones.

a) $x^4-x^3+7x^2+x+15 \;|\; x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-x+5$; $R(x)=3x+5$)*

b) $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \;|\; 2x^2-3$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+1$; División exacta)*

c) $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \;|\; 2x^2-4x+3$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+x-2$; División exacta)*

d) $x^3+2x^2+x-1 \;|\; x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=x+2$; $R(x)=2x+1$)*

e) $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \;|\; 2x^2-3x+2$ *(Soluc: $C(x)=4x^3-2x^2+3x+1$; División exacta)*

f) $x^4+3x^3-2x+5 \;|\; x^3+2$ *(Soluc: $C(x)=x+3$; $R(x)=-4x-1$)*

g) $x^5-2x^4+3x^2-6 \;|\; x^4+1$ *(Soluc: $C(x)=x-2$; $R(x)=3x^2-x-4$)*

h) $x^2 \;|\; x^2+1$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)=-1$)*

Factor común

Sacar factor común en una expresión algebraica con varios sumandos, consiste en encontrar una parte común a todos esos sumandos y aplicar la propiedad distributiva para poner la expresión algebraica como producto de esa parte común y una serie de sumandos entre paréntesis.

Ejemplo:

$$16xyz - 24xz + 4x =$$

$$(4x) \cdot 4yz - (4x) \cdot 6z + (4x) \cdot 1 =$$

$$4x \cdot (4yz - 6z + 1)$$

8. Extrae el mayor factor común que sea posible:

a) $4x^2-6x+2x^3$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-3)$)*

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y$ *(Soluc: $3x^2y(4x^2y+2y^3-5x)$)*

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz$ *(Soluc: $xy(-3-2y-10xz)$)*

d) $-3x+6x^2+12x^3$ *(Soluc: $3x(4x^2+2x-1)$)*

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3$ *(Soluc: $2ab(b-2a^2+4a^3b^2)$)*

f) $2x^3+4x^2-8x$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-4)$)*

g) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2$ *(Soluc: $3xy(2x^2y-xz+3y^2z^2)$)*

h) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)$ *(Soluc: $2x(x-3)(x+3)$)*

División de polinomios (Ruffini)

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableció un método más breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma x — a**.

Recuerda:

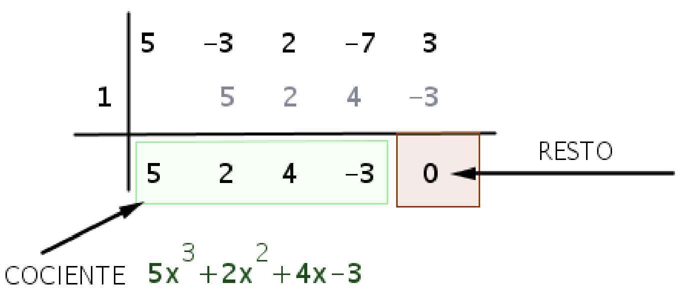
Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

Ejemplo:

Realiza la siguiente división utilizando el método de Ruffini:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3) : (x - 1)$$

-



9. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini

a) $x^4-7x^3+8x^2-2 \,|\, x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

b) $x^3-4x^2+5x-8 \,|\, x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

c) $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \,|\, x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*

d) $2x^5+3x^2-6 \,|\, x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*

e) $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \,|\, x-4$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*

f) $2x^4-10x+8 \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*

g) $10x^3-15 \,|\, x+5$ *(Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)*

Raíz de un polinomio

Las **raíces de un polinomio** (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores para los cuales, el **valor numérico del polinomio es igual a cero**.

Un número a es una **raíz** o un **cero** de un polinomio p(x), si p(a) = 0.

Dicho de otra forma, las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación p(x) = 0.

10. Comprueba si 5 y – 5 son raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 5$

11. Encuentra las raíces de estos polinomios:

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 - 8x + 15$

12. Encuentra las raíces de estos polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$ **b)** $x^3 - x^2 - 25x + 25$

13. Encuentra las raíces de estos polinomios:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ *(Soluc: x=-1,2,3)*

b) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=-1,2,3,4)*

c) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ *(Soluc: x=1doble,-3)*

Factorizar polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo en forma de factores.
Ejemplo:

Factoriza: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

Utilizando Ruffini podemos encontrar que las raíces del polinomio son
x = 1, x = 2, x = 3 y x = 4, por lo que podemos factorizarlo del siguiente modo:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

14. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$

b) $x^3+x^2-9x-9=0$

c) $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$

d) $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$

e) $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$

f) $3x^3+x^2-8x+4=0$

g) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$

h) $x^4-5x^2+4=0$

i) $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$

j) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

k) $x^3-5x^2-5x-6=0$

l) $x^5-2x^4-x+2=0$

m) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

n) $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$

o) $x^3+3x^2-10x-24=0$

p) $x^3+2x^2-15x-36=0$

q) $x^3-3x^2+3x-1=0$

15.

Practica

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\dfrac{6x^2y}{30x}$
2. $\dfrac{9x^4y^2z}{x^6y}$
3. $\dfrac{20xyz^3}{60x^2yz^3}$
4. $\dfrac{8a}{a^2+3a}$
5. $\dfrac{12x}{3x+6}$
6. $\dfrac{10x-5x^2}{2x^2}$
7. $\dfrac{x^2-25}{x-5}$
8. $\dfrac{b^2-4}{4b-8}$
9. $\dfrac{3x+3}{x^2-1}$
10. $\dfrac{a+7}{a^2+9a+14}$
11. $\dfrac{x^2+6x+8}{6x+24}$
12. $\dfrac{y^2+7y+6}{y^2+5y-6}$

16. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

d) $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

e) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+1}\right)$

f) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

g) $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\right)$

h) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ $(Soluc:x-1)$

i) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

j) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$ $(Soluc:\ irreducible)$

k) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+3}\right)$

l) $\dfrac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{4x-1}{x+1}\right)$

m) $\dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4}\right)$

n) $\dfrac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+2}{x-1}\right)$

o) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

p) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2-1}{x^2+4}\right)$

q) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x-1}\right)$

r) $\dfrac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

s) $\dfrac{x^2-4}{x^3-7x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-2}{x^2-2x-3}\right)$

17. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{3}{2x+4}+\frac{2x}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{7x-6}{2x^2-8}\right)$

b) $\frac{x^2-1}{x^3}-\frac{2x}{x^2+7}$ $\left(Soluc: \frac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3}\right)$

c) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc: \frac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

d) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}$ $\left(Soluc: \frac{2x^2+8}{x^2-4}\right)$

e) $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{x+1}{4x-8}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+11x+2}{4x^2-16}\right)$

f) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ $\left(Soluc: \frac{4x}{x^2-1}\right)$

* **g)** $\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{2}{x+1}\right)$

h) $1-\frac{x}{y}$ $\left(Soluc: \frac{y-x}{y}\right)$

i) $x-\frac{x^2-1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x}\right)$

j) $\frac{3x-2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+6x}{x^2-1}\right)$

k) $\frac{7x}{6x+12}-\frac{x+5}{2x^2-8}$ $\left(Soluc: \frac{7x^2-17x-15}{6x^2-24}\right)$

l) $\frac{x+3}{x^2+1}+\frac{2x}{x-3}$ $\left(Soluc: \frac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}\right)$

m) $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}$ $\left(Soluc: \frac{-x^2+2x+2}{x^2-1}\right)$

n) $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\right)$

o) $\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-5y}{x-y}$ $\left(Soluc: \frac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2}\right)$

p) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}$ $\left(Soluc: \frac{x-z}{xz}\right)$

q) $x+\frac{1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+1}{x}\right)$

r) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$ $\left(Soluc: \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

* **s)** $\frac{1}{x-2}-\frac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{1}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x^2+4x+4}\right)$

* **t)** $\frac{x-2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{6x-x^2}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x-2}\right)$

* **u)** $\frac{1}{x-1}-\frac{3x+3}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+2}$ $\left(Soluc: \frac{1}{1-x}\right)$

v) $\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{1}{x-2}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+5x-4}{x^3-4x}\right)$

* **w)** $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{12}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{2x+3}{x+2}\right)$

x) $\frac{x-2}{x^2+x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{x+3}{x^2-3x+2}$ $\left(Sol: \frac{x^2+x+11}{x^3-x^2-4x+4}\right)$

y) $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x+3}\right)$

z) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}$ $\left(Soluc: \frac{5x^2+7x}{x^2-1}\right)$

α) $\frac{4}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1}\right)$

β) $\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$ $\left(Soluc: \frac{2}{x+2}\right)$

* **γ)** $\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{x^2+2x+1}-\frac{1-2x}{1+x}$ $\left(Soluc: \frac{3x}{x+1}\right)$

δ) $\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x+1}{x^2-1}+\frac{x}{(x+1)^2}$ $\left(Soluc: \frac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x}\right)$

ε) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-10x+24}$ $\left(Soluc: \frac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 44: 58 a 61***

18. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-2}\ \frac{x-1}{x+1}=$ $\left(Soluc:\ \frac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab}=$ $\left(Soluc:\ -\frac{2}{a-b}\right)$

d) $\frac{xy}{x^2-y^2}:\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x-y}=$ $\left(Soluc:\ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$