DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA. REGLA DE SARRUS
Ejercicios

1. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k para que det (A) = – 2.

2. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

3. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Calcula los valores de λ para los que el determinante de A – 2I es cero.

4. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real. Calcula, en función de a, los determinantes de 2A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

5. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos. Calcula los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$.

6. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\det(A) = -7 \;\; y \;\; A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k para que det (A) = – 2.

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow k^2 - 1 = -2 \Rightarrow k^2 + 1 = 0$$

No hay ningún valor de k que haga que su determinante valga – 2

---

2. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Calculamos el determinante de cada matriz e igualamos los resultados obtenidos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 4m$$

$$-m - 4 = m^2 + 4m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1\ ;\ m = -4$$

Luego, para $m = -1$ y $m = -4$, el det(A)=det(B)

---

3. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Calcula los valores de λ para los que el determinante de A – 2I es cero.

$$A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2 \ ; \ \lambda=1 \ ; \lambda=-1$$

---

4. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real. Calcula, en función de a, los determinantes de 2A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

$$|2A|=\begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix}=-4a^2$$

$$|A^t|=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix}=-a^2$$

---

5. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos. Calcula los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A-\lambda I| = 0$.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda=2 \ ; \ \lambda=5$$

---

6. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\mathbf{det}(A)=-7 \ \ y \ \ A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz simétrica, tiene que ser cuadrada de orden 2 y de la forma A = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

|A| = $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = -7$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} ac-b^2=-7 \\ 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\}$, obtenemos que $a=-1; b=2; c=3$

Luego la matriz pedida es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$