SISTEMAS DE ECUACIONES MATRICIALES
Ejercicios

1. Halla las matrices X e Y que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Siendo A y B dos matrices cuadradas de orden 2, resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula X e Y tales que X – Y = A^t y 2X – Y = B (A^t es la matriz traspuesta de A).

5. Sean A y B las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula las matrices X e Y para que 2X – Y = A y X – 3Y = B.

6. Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar las matrices (A + B)(A – B) y $A^2 - B^2$

SOLUCIONES

1. Halla las matrices X e Y que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución

Sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la segunda ecuación la matriz que hemos obtenido y despejamos la matriz Y:

$$X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$Y = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Siendo A y B dos matrices cuadradas de orden 2, resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -3A + 9B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 3A - 5B + (-3A + 9B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$4B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$-A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 3B - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & \frac{30}{4} \\ \frac{51}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{14}{4} \\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

3. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos la segunda ecuación por −2

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -2A + 6B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro

$$7B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y sumamos miembro a miembro obtenemos:

$$7A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

4. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula X e Y tales que X – Y = A^t y 2X – Y = B (A^t es la matriz traspuesta de A)

Solución:
Planteamos el sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Si cambiamos la primera ecuación de signo y sumamos, tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y sustituyendo en la primera ecuación tenemos que: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

5. Sean A y B las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula las matrices X e Y para que 2X – Y = A y X – 3Y = B.

Solución:

Planteamos el sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{l} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos, tenemos que:

$$5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar las matrices $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$

Solución:

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, tenemos: $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos: $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$