ECUACIONES MATRICIALES
Ejercicios

1. Determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = X - B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Considera la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz X que verifica:
$C \cdot X - X = 2I$ (I es la matriz identidad de orden 3)

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz P que verifica $BP - A = C^t$ (C^t es la traspuesta de C)

4. Halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$ sabiendo que:
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

5. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.
Determina la matriz X para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$ (A^t es la matriz traspuesta de A)

6. Considera las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

7. Sea k un número natural y sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular A^k
   b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = B\,C$

8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula los valores de m para que A tenga inversa.
   b) Haciendo m = 0, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$ donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

9. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2$.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Demuestra que A2 + 2A = I y que $A^{-1} = A + 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
   b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $A^2 + XA + 5A = 4I$ (I es la matriz identidad de orden 2).

SOLUCIONES

1. Determina la matriz X que verifica la ecuación A·X = X - B siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Empezamos trabajando con las matrices para despejar X:

$$AX = X - B \quad \Leftrightarrow \quad AX - X = B \quad \Leftrightarrow \quad (A - I)X = B \quad \Leftrightarrow$$

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = (A - I)^{-1}B$$

Por tanto, si A - I es una matriz inversible podremos determinar la matriz X que verifica la ecuación:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \; = -2 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A - I)^t}{|A - I|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como A - I es inversible y conocemos su inversa podemos determinar X:

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

2. Considera la matriz C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz X que verifica:

   C · X – X = 2I (I es la matriz identidad de orden 3)

   Solución:

$$C \cdot X - X = 2I \Rightarrow (C-I) \cdot X = 2I \Rightarrow X = (C-I)^{-1} \cdot 2I = 2(C-I)^{-1}$$

Calculamos la matriz $C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos la matriz inversa de $C - I$.

$$(C-I)^{-1} = \frac{((C-I)^d)^t}{|C-I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz P que verifica BP - A = C^t (C^t es la traspuesta de C)

Solución:

Empezamos despejando P:

$$BP - A = C^t \quad \Leftrightarrow \quad BP = C^t - A \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1}BP = B^{-1}\left(C^t - A\right) \quad \Leftrightarrow \quad P = B^{-1}\left(C^t - \right.$$

La ecuación tendrá solución si y sólo si B es inversible. Veamos si B tiene inversa y en caso de tenerla calculémosla:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ es inversible}$$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)^t}{|B|} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como B es inversible podemos calcular P:

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = B^{-1}\left(C^t + A\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$ sabiendo que:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos la matriz X:

$$A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A + B \cdot A = C \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X \cdot I + B \cdot A = C \cdot I \Rightarrow A \cdot X + B \cdot A = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \cdot X = C - B \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.
Determina la matriz X para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$ (A^t es la matriz traspuesta de A)

<u>Solución:</u>
Despejamos la matriz X:

$$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A^t)^{-1} = \frac{((A^t)^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Considera las siguientes matrices: A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial A · X · A^t – B = 2I, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-2c-2b+4d=-1 \\ -b+2d=0 \\ -c+2d=2 \\ d=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1\ ;\ b=2\ ;\ c=0\ ;\ d=1$$

Luego: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Sea k un número natural y sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^k

b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = B\,C$

Solución:

a) Empezamos calculando A^k :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Empezamos despejando X en la ecuación:

$$A^k X = BC \iff \left(A^k\right)^{-1} A^k\, X = \left(A^k\right)^{-1} BC \iff X = \left(A^k\right)^{-1} BC$$

La ecuación tendrá solución si A^k es inversible. Veamos si lo es y calculemos su inversa:

$$|A^k| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\left(A^k\right)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A^k)^t}{|A^k|} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A^k es inversible, la ecuación tiene solución. Calculémosla:

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(A^k\right)^{-1} BC = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula los valores de m para que A tenga inversa.
   b) Haciendo m = 0, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$ donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

Solución:

a) Empezamos por ver para qué valores de m es A inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{vmatrix} = 3(m+1) - m(1-m) = 3m + 3 - m + m^2 = m^2 - 2m + 3$$

$m^2 - 2m + 3 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$. Por tanto, A es inversible para todo $m \in \mathbb{R}$.

b) Para m = 0, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A es inversible por el apartado a)

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para la ecuación $A \cdot X \cdot A = I_2$ se tiene que:

$$AXA = I_2 \iff A^{-1}AXA = A^{-1} I_2 \iff XA = A^{-1} \iff$$

$$XAA^{-1} = A^{-1}A^{-1} \iff X = A^{-1}A^{-1}$$

de manera que la ecuación tendrá solución si y sólo si A es inversible. Como ya hemos visto que A es inversible y conocemos su inversa, podemos calcular X:

$$X = A^{-1}\,A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

9. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2$

Solución:

Despejamos la matriz *X*:

$$A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2 \Rightarrow A \cdot X - B \cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow (A-B)\cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow X = (A-B)^{-1}\cdot(A^2 - B^2)$$

Calculamos la matriz inversa de $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-B)^{-1} = \frac{((A-B)^d)^t}{|A-B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2, B^2 y $A^2 - B^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (A-B)^{-1}\cdot(A^2 - B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Demuestra que A2 + 2A = I y que A^{-1} = A +2I, siendo I la matriz identidad de orden 2.

d) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: A^2 + XA + 5A = 4I (I es la matriz identidad de orden 2).

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{Es cierto.}$$

Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} a la izquierda:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A + 2A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \Rightarrow A + 2I = A^{-1} \Rightarrow \text{Es cierto}$$

b) Vamos a resolver la ecuación matricial $A^2 + XA + 5A = 4I$:

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha.

$$A^2 + XA + 5A = 4I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} + X \cdot A \cdot A^{-1} + 5A \cdot A^{-1} = 4I \cdot A^{-1} \Rightarrow A + X + 5I = 4A^{-1} \Rightarrow X = 4A^{-1} - A - 5I$$

Sustituimos $A^{-1} = A + 2I$

$$X = 4A^{-1} - A - 5I = 4(A + 2I) - A - 5I = 3(A + I) = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$