RANGO DE UNA MATRIZ

El **rango de una matriz** A es el número máximo de filas (o columnas) que son linealmente independientes (**linealmente independiente** quiere decir que ninguno de ellas puede ponerse en combinación lineal con las demás).

Se expresa como rg(A) y, el rango de una matriz m x n es, a lo sumo, el **menor** de los números "m" o "n".

Cálculo del rango de una matriz por determinantes.

- El **rango de una matriz** es el orden del mayor menor no nulo que podemos obtener de esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

$|6| \longrightarrow$ menor de orden 1

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 18 & 19 & 20 \end{vmatrix} \longrightarrow$ menor de orden 3

$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 16 & 17 \end{vmatrix} \longrightarrow$ menor de orden 2

Menor de orden *k*

- Se llama **menor de orden *k*** de una matriz $A_{m \times n}$ al determinante de orden k que está formado por los elementos que pertenecen a k filas y a k columnas de la matriz A.

En el margen podemos ver menores de distintos órdenes para una matriz dada.

Ejemplo:

Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Pueden encontrarse menores de órdenes 1, 2 y 3 distintos de cero. Así:

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -48 \neq 0$$

El menor de mayor orden distinto de cero es el propio determinante de la matriz; por tanto, el rango de la matriz A es 3. Es decir, sus tres filas son linealmente independientes y sus tres columnas son linealmente independientes.

Rango de matrices cuadradas:

Rango de matrices cuadradas

En las matrices A cuadradas de orden n se verifica:

- Si $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango $(A) = n$
- Si $|A| = 0 \Rightarrow$ rango $(A) < n$

Para matrices cuadradas es un buen método empezar calculando el determinante de la propia matriz, ya que en caso de ser no nulo, obtenemos que el **rango es el propio orden de la matriz**.

Propiedades del rango de una matriz:

1. rg(A) = rg(A^t)
2. El rango de una matriz A no varía cuando ésta se somete a operaciones elementales.
3. A$\in M_{nxn}$ tiene inversa $\Leftrightarrow rg(A) = n$