RANGO DE UNA MATRIZ
Ejercicios

1. Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

3. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, discute el rango de A según los valores de k.

4. Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$. Estudia el rango de M según los valores de m.

5. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.

6. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$. Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

7. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$, determina, si existen, los valores de k para que rango(A) = 1.

8. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcula el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).

9. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

10. Obtén un vector no nulo v = (a, b, c), de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

Por lo tanto, rg(A) = 3

2. Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Como A es una matriz cuadrada, de orden 3, tendrá rango a lo sumo 3. Como es una matriz cuadrada conviene empezar calculando el determinante de A.

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante es nulo, buscamos si hay algún menor de orden 2 no nulo. Vemos que

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

es un menor de orden 2 no nulo. Por tanto rg(A) = 2.

3. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, discute el rango de A según los valores de k.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3 + 3k^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \ ; \ k = -1 \ ; \ k = -\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

$$\text{Para } k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } k = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

4. Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$. Estudia el rango de M según los valores de m.

Solución:
Calculamos el determinante de la matriz M:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = -1$$

De donde tenemos que:

	Rango(M)
$m = 0$	2
$m = -1$	2
$m \neq 0 \ y \ -1$	3

5. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.

Solución:
Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \ ; \ \alpha = -2$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

	R(A)
$\alpha = 1$	1
$\alpha = -2$	2
$\alpha \neq 1 \ y \ -2$	3

6. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$. Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

Solución:
Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = -m^3 + 2m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = 1$$

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y como el } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y como el } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

7. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$, determina, si existen, los valores de k para que rango(A) = 1.

Solución:
Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \; ; \; k = -1$$

Luego, el rango de A es 1 si $k=1$ ó $k=-1$

8. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcula el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).

   Solución:
   Calculamos la matriz $A \cdot B^t + \lambda I$

$$A \cdot B^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A \cdot B^t + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

   Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ Rango(A) = 3.
   Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ Rango(A) = 1.

9. Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

   Solución:
   Calculamos el determinante de cada matriz y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

	R(A)
$m = -4$	1
$m \neq -4$	2

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = -4$$

	R(B)
$m = 0$	2
$m = -4$	2
$m \neq 0$ y -4	3

Luego, para $m = 0$ el rango de A es igual al rango de B y vale 2.

10. Obtén un vector no nulo v = (a, b, c), de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que el rango (A) = rango (B) = 2, sus determinantes deben valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = b + a - c - b = a - c = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = -2c + 3a - 2b = 0$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\left.\begin{matrix} a - c = 0 \\ 3a - 2b - 2c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = c \ ; \ b = \dfrac{c}{2} \ ; \ c = c$

Luego, el vector que nos piden es $v = \left(c, \dfrac{c}{2}, c \right)$, siendo c cualquier número distinto de cero.