MATRIZ INVERSA

Dada la matriz A ∈ M_{nxn}, se dice que la matriz A^{-1}∈ M_{nxn}, es su **inversa** si se cumple:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

La matriz inversa no siempre existe, y en caso de existir, es única. Cuando una matriz tiene inversa, se dice que es **invertible**.

Ejemplo:

La inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es A^{-1} = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ya que se cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} \text{ (Matriz identidad)}$$

y

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} \text{ (Matriz identidad)}$$

Condición para que una matriz tenga inversa.

Dada la matriz A ∈ M_{nxn}, para que exista su inversa, A^{-1}, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero:

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Ejemplo:

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que tiene inversa.

Para que la matriz A tenga inversa, debe ser cuadrada (lo es, porque es de orden 2x2) y su determinante debe ser distinto de cero.

Calculamos |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \neq 0 \Rightarrow \text{ Tiene inversa}$$

Métodos para calcular la inversa de una matriz

Método de eliminación de Gauss

Se coloca la matriz identidad a continuación de la matriz que nos dan y se realizan las mismas operaciones elementales en ambas matrices hasta conseguir que la matriz de la izquierda sea la matriz identidad. La matriz que quede a la derecha, será la inversa de la original.

Ejemplo:

Calcula la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

La ampliamos con la matriz identidad de orden 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan transformaremos la mitad izquierda A en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte del lado derecho será la matriz inversa A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R1 \rightarrow -1R1 + R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R2 \rightarrow -1R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R3 \rightarrow -1R2 + R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R2 \rightarrow R3 + R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R1 \rightarrow -1R1 + R2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Por lo tanto la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la inversa utilizando determinantes

Dada la matriz A$\in M_{nxn}$, su inversa, A^{-1}, si existe, viene determinada por la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$$

Ejemplo:

Vamos a calcular la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 1 - 0 - 0 - 6 = -3$$

Calculamos la matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Le hacemos la traspuesta:

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por último, dividimos por -3 (valor de |A|)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la inversa de una matriz:

Si A y B son dos matrices de orden n inversibles se verifican las siguientes propiedades

1. A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $A \cdot B$ es inversible y su inversa es $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$